

Alıştırmalar I

Aşağıdaki a, b, c sayıları, pozitif tam sayılardır. $a \mid b$ işareti, a 'yi b 'yi böler anlamına gelmektedir, yani $b = ak$ eşitliğini sağlayan bir k tam sayısı olduğunu söyler.

Aşağıdaki cümlelerin doğru mu, yanlış mı olduğuna karar verin. Doğru cümleleri, sekiz cebirsel aksiyomdan başka bir aksiyom kullanmadan kanıtlayın. Yanlış cümleler için karşı örnek verin. Yanlış cümlelerin değilini yazın.

1. Her a için, $2 \mid a$ ve $2 \mid a + 1$.
2. Her a için, $2 \mid a$ veya $2 \mid a + 1$.
3. Her a, b için, $a \mid b$ ise, $a + 1 \mid b + 1$.
4. Her a için, $3 \mid a$ ancak ve ancak $9 \mid a$.
5. Her a, b için, $a \mid b$ ise, $b \mid a$.
6. Her a, b için, $a \mid b$ ancak ve ancak $a \mid -b$.
7. Her a, b için, $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise,
 - (a) $a \mid b + c$.
 - (b) $a \mid b - c$.
 - (c) $a^2 \mid bc$.
 - (d) $a \mid b^2 + c^2$
8. Her a, b, c için, $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise, $a \mid c$.
9. Her a, b, c için, $a \mid b$ veya $a \mid c$ ise, $a \mid bc$.
10. Her a, b, c için, $a \mid b$ veya $a \mid c$ ise, $a^2 \mid bc$.
11. Her a için, $2 \mid a$ ise, $4 \mid a$ veya $4 \mid a + 2$.
12. Her a, b için, $a \mid b$ ise, $a \nmid b + 1$.
13. Her a, b, c için, $a \mid b$ ve $a \nmid c$ ise, $a \nmid b + c$.

14. Her a, b, c için, $a \mid bc$ ve $a \nmid b$ ise, $a \mid c$.

Aşağıdaki sorular, \forall ve \exists işaretlerinin sırasının önemli olduğuna dikkat çekmek için sorulmuştur.

15. $(\forall a)(\exists b)(a < b)$

16. $(\exists b)(\forall a)(a < b)$

17. $(\forall a)(\exists b)(a + b = 0)$

18. $(\exists b)(\forall a)(a + b = 0)$

19. $(\exists b)(\forall a)(a + b = a)$

Aşağıdaki cümleleri her pozitif tam sayı n için tümevarımla kanıtlayın.

20. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

21. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

22. $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

23. Her $a, r \in \mathbf{R}$, $r \neq 1$ için,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

24. Her pozitif gerçel sayı a için, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

25. $2^n n! \mid (2n)!$