

### Alıştırmalar IV

Eğer  $n$  elemanlı bir tam sayılar kümesi mod  $n$ 'de yazıldığında  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  kümesine eşitse, o kümeye *mod  $n$ 'de eksiksiz kalanlar kümesi* denir. Örneğin, ardışık her  $n$  sayı, mod  $n$ 'de bir eksiksiz kalanlar kümesi oluşturur.

1.  $1^5 + 2^5 + \dots + 99^5 + 100^5$  sayısının 4 ile bölümünden kalan kaçtır?
2. Eğer  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , mod  $n$ 'de bir eksiksiz kalanlar kümesi ise ve  $\text{obeb}(a, n) = 1$  ise, o zaman  $\{aa_1, \dots, aa_n\}$  kümesinin de mod  $n$ 'de bir eksiksiz kalanlar kümesi oluşturduğunu gösteriniz.
3.  $\{0^2, 1^2, \dots, (n-1)^2\}$  kümesi mod  $n$ 'de bir eksiksiz kalanlar kümesi oluşturmayabilir.
4.  $n = \text{okek}(n_1, n_2)$  olsun. Eğer  $a \equiv b \pmod{n_1}$  ve  $a \equiv b \pmod{n_2}$  ise,  $a \equiv b \pmod{n}$  olduğunu gösteriniz.
5. Her tek sayı  $a$  ve  $n \geq 1$  için,  $a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$  olduğunu gösteriniz. (İpucu:  $n$  üzerinden tümevarım uygulayın.)
6. Eğer mod  $n$ 'de,  $ab \equiv cd$ ,  $a \equiv c$  ve  $\text{obeb}(a, n) = 1$  ise,  $b \equiv d$  olduğunu gösteriniz.
7. Eğer  $a \equiv b \pmod{n_1}$ ,  $b \equiv c \pmod{n_2}$  ve  $d = \text{obeb}(n_1, n_2)$  ise,  $a \equiv c \pmod{d}$  olduğunu gösteriniz.
8.  $N$ ,  $t$  tabanına göre  $a_m \dots a_1 a_0$  şeklinde yazılmış olsun. Bu durumda,  $t-1 \mid N$  ancak ve ancak  $t-1 \mid a_m + \dots + a_0$  olduğunu gösteriniz.
9. 495 sayısı  $273x49y5$  sayısını bölüyorsa,  $x$  ve  $y$  değerlerini bulunuz. (İpucu:  $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$ )
10. 3'ten büyük her  $p$  asal sayısı için,  $10^{2p} - 10^p + 1$ 'in 13'e bölündüğünü gösterin.
11.  $2 \mid a$ ,  $3 \mid a+1$ ,  $4 \mid a+2$ ,  $5 \mid a+3$ ,  $6 \mid a+4$  koşullarını sağlayan en küçük  $a > 2$  değerini bulunuz.
12.  $x \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $x \equiv 7 \pmod{15}$  sisteminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.
13. Eğer  $x \equiv a \pmod{n}$  ise,  $x \equiv a \pmod{2n}$  veya  $x \equiv a+n \pmod{2n}$  olduğunu gösterin.
14. 2, 3, 6, 12'ye bölündüğünde sırası ile 1, 2, 5, 5 kalanları veren iki sayı bulun.
15.  $3^{100}$  sayısının birler basamağını hesaplayınız.
16. Her tam sayı  $a$  için,  $a$  ve  $a^5$ 'in birler basamağının aynı olduğunu gösterin.