MAT216: Geometri ve Cebir 15 Mayıs 2013

Hazırlayan: Ayşe Berkman

Alıştırmalar IV

G bir grup olsun.

1. Her $N \trianglelefteq G$ için, $\pi : G \to G/N$, $\pi(g) = gN$ olarak tanımlanan gönderme, örten bir homomorfizmadır. $\mathrm{Ker}(\pi) = N$'dir. (Bu şeklide tanımlanan homomorfizmalara *doğal homomorfizma* veya *doğal projeksiyon* denir.)

2. $A, B \trianglelefteq G$, $G = AB$ ve $A \cap B = 1$ ise $G \cong A \times B$ olduğunu kanıtlayın.

3. $H \leqslant G$ ise her $g \in G$ için $g^{-1}Hg \leqslant G$ olduğunu gösterin. Ayrıca, H sonlu ise, $|H| = |g^{-1}Hg|$ eşitliği de sağlanır.

4. Bir grupta aynı eleman sayısına sahip iki altgrubun eşlenik olmayabileceğini bir örnekle gösterin.

5. $H \leqslant G$ ve $|H| = n$ olsun. Eğer G'de H'den başka n elemanlı altgrup yoksa, H'nin G'de normal olduğunu gösterin.

6. G sonlu bir grup, $N \trianglelefteq G$ ve $\mathrm{obeb}(|N|, [G : N]) = 1$ olsun. G'nin $|N|$ elemanlı başka bir altgrubu olmadığını gösterin.

7. $(G, +)$ sonlu değişmeli bir grup olsun. $|G|$ sayısının her k böleni için $G_k := \{g \in G : o(g) \mid k\}$ olarak tanımlayalım. İlk olarak $G_k \trianglelefteq G$ olduğunu gösterin.
   Şimdi $\mathrm{obeb}(m, n) = 1$ olacak şeklide $|G| = mn$ ifadesini yazalım. Aşağıdakileri gösterin.

   (a) $G_m \cap G_n = 0$.
   (b) $G = G_m + G_n$.
   (c) $G \cong G_m \times G_n$.

   Aşağıdaki sorularda p asal sayıdır.

8. $|G| = p^2$ ise $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ veya $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ olduğunu gösterin.

9. $G = \langle r, x \rangle$, $r^2 = 1$, $x^p = 1$, $G = \{1, x, \dots, x^{p-1}, r, rx, \dots rx^{p-1}\}$ ve G değişmeli değilse, xr ne olabilir?

10. $G = 2p$ ve p tekse, $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$ veya $G \cong D_p$ olduğunu gösterin.