2 Grup Kavramına Giriş

2A Grubun Tanımı

Bu derste işlem ile her zaman ikili işlem kastedilmektedir.

Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki bir işlemin tablosunun sudoku özelliğini sağlaması için gerekli koşulları bulmaya çalışalım. İşlemimizi $*$ ile gösterelim ve $a, b, c \in X$ olsun.

Tabloda a elemanına karşılık gelen satırdan iki girdi seçersek, bu girdiler $a * b$ ve $a * c$ biçiminde olur. Benzer şekilde tabloda a elemanına karşılık gelen sütundan iki girdi seçersek, bu girdiler de $b*a$ ve $c*a$ biçiminde olur. Sudoku özelliğinin sembollerle ifadesi, her $a, b, c \in X$ için

$$(a * b = a * c \implies b = c) \text{ ve } (b * a = c * a \implies b = c)$$

şeklindedir.

Kolayca görüleceği gibi $a * b = a * c$ eşitliğinde a'ları sadeleştirebilmemiz gerekmektedir. Sadeleştirme aslında iki tarafı söz konusu elemanın tersi ile işleme sokmak demektir. Dolayısı ile, sudoku özelliğinin sağlanması için X kümesindeki her elemanın tersi yine X kümesinde olmalıdır. Bir elemanın tersinden söz edebilmek için önce işlemin etkisiz elemanının olması gerekir. Öyleyse $*$ işleminin etkisiz elemanının e ve a'nın tersinin a^{-1} olduğunu varsayalım. Eşitliğin iki tarafını soldan a^{-1} ile çarptığımız zaman ilk yapılması gereken işlemi paranteze almayı unutmayalım. Toplama ve çarpma birleşme özelliğine sahip olduğu için bu işlemlerle çalışırken parantez kullanmayız ancak yalnızca işlem olduğunu bildiğimiz $*$ işlemi için parantezleri kullanmak zorundayız.

Böylece $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$ eşitliğini elde ederiz. Bu satırdan anlaşıldığı gibi sadeleştirme yapabilmemiz için birleşme özelliğine ihtiyacımız var. Bu özellikten dolayı $(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ eşitliğini elde edebiliriz ve dolayısı ile $b = c$ sonucuna ulaşırız.

Son olarak, bir işlemin X kümesi üzerinde tanımlı olması demek, X'ten seçeceğimiz her ikilinin işlem sonucunun yine X'te olması demektir. Aslında bu özellik, işlem olmanın doğal sonucu olsa da genellikle kapalılık ismi ile anılır.

Sudoku özelliği için gerekli olan koşullar grubun tanımını verir.

Tanım. G boş olmayan bir küme olsun ve $*$, G üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(G, *)$ ikilisine *grup* denir.

0. (Kapalılık) Her $a, b \in G$ için $a * b \in G$ sağlanır.
1. (Birleşme) Her $a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ sağlanır.
2. (Etkisiz eleman) G'de öyle bir $e \in G$ elemanı vardır ki, her a elemanı için $a*e = e*a = a$ eşitliği sağlanır.
3. (Tersler) G'deki her a elemanı için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ eşitliğini sağlayan bir $a^{-1} \in G$ vardır.

Not. Birim elemana etkisiz eleman da denir.

Alıştırma 1. $(G, *)$ bir grupsa her $a, b \in G$ için $a * x = b$ ve $x * a = b$ eşitliklerinin $x \in G$ için çözümü vardır. Eğer grup değişmeli değilse çözümler farklı olabilir.

Gözlemler.

1. Boş küme grup değildir, çünkü her grubun bir birim elemanı olmak zorundadır.
2. Yalnızca işlemin birim elemanından oluşan kümeler gruptur. Örneğin; $(\{0\}, +)$, $(\{1\}, \cdot)$, $(\{I\}, \circ)$ tek elemanlı gruplardır.
3. Eğer $\{e, a\}$ grupsa $a^2 = a * a = e$ olmalı. Yansımalar bu özelliği sağlar, başka örnekler verebilir misiniz?

Örnek 1. Bileşke işlemine göre gruplar: Boş olmayan her $X \subseteq \mathbb{R}^2$ için $\mathrm{Sym}(X)$, dolayısı ile birinci bölümde yapılan tüm örnekler gruptur.

Örnek 2. Ayrıca boş olmayan her A kümesi için $\mathcal{F}(A) = \{f : A \to A \mid\ f \text{ bire bir ve örten}\}$ bileşke işlemi altında gruptur.

Örnek 3. Toplamaya göre grup oluşturan örnekler: Tam sayılar $\mathbb{Z}$, rasyonel sayılar $\mathbb{Q}$, reel sayılar $\mathbb{R}$, kompleks sayılar $\mathbb{C}$, vektörler $\mathbb{R}^n$, polinomlar $\mathbb{R}[x]$, reel girdili diziler, matrisler $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Örnek 4. Çarpmaya göre gruplar: $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_3 \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \neq 0\}$.

Alıştırma 2. Aşağıdaki kümelerin toplamaya göre grup olup olmadığını söyleyin, yanıtınızı açıklayın: $\{n \in \mathbb{Z} \mid -1000 \leqslant n \leqslant 1000\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$, $2\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z} + 1$, $\{0, 3, 6, 9, 12\}$, mod 15'te toplamaya göre; $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, mod 15'te toplamaya göre.

Alıştırma 3. Aşağıdaki kümelerin çarpmaya göre grup olup olmadığını söyleyin, yanıtınızı açıklayın: $(0, 1)$, $(0, 1]$, $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{Q}_{>0}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid ||z|| = 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid ||z|| \geqslant 1\}$, $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_8 \setminus \{0\}$.

Alıştırma 4. Her $n \geqslant 2$ tam sayısı için $\mathbb{Z}_n^* = \{0 < a < n \mid \mathrm{ebob}(a, n) = 1\}$ çarpmaya göre gruptur.

2B Altgruplar

Bu bölümde $(G, \cdot)$ bir grubu göstersin.

Tanım. Eğer $H \subseteq G$ ise ve H altkümesi de G'yi grup yapan işleme göre bir grup oluşturuyorsa, H'ye G'nin *altgrubudur* deriz ve $H \leqslant G$ olarak yazarız.

Verilen bir altkümenin altgrup olup olmadığını kontrol ederken birleşme özelliğini yeniden kontrol etmeye gerek yoktur. Ancak diğer üç özellik mutlaka kontrol edilmelidir.

Örnekler ve Alıştırmalar.

1. Her G grubu için en küçük altgrup $\{e\}$'dir ve en büyük altgrup G'dir. Eğer $H \leqslant G$ ve $|H| = 1$ ise $H = \{e\}$ olmalıdır. (Açıklayın.)

2. Bir grubun 2 elemanlı birçok altgrubu olabilir. Örneğin, Sym(Δ)'da 3 yansıma olduğu için $\{\text{id}, r\}$ biçiminde 3 farklı altgrubu vardır. Sym($\square$) grubunun 2 elemanlı 5 altgrubu vardır, hepsini yazın.

3. Düzgün n-gonun tüm döndürmeleri kümesi bir altgrup oluşturur ama tüm yansımaları kümesi bir altgrup oluşturmaz.

4. Kendinden ve birimden başka tüm altgrupları 2 elemanlı olan bir grup örneği verin.

5. Toplamaya göre, $\{0\} \leqslant \mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Q} \leqslant \mathbb{R} \leqslant \mathbb{C}$ bir altgruplar zinciri oluşturur.

6. Çarpmaya göre, $\{1\} \leqslant \{1, -1\} \leqslant \mathbb{Q} \setminus \{0\} \leqslant \mathbb{R} \setminus \{0\} \leqslant \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bir zincir oluşturur.

7. Çarpmaya göre, $\mathbb{Q}_{>0} \leqslant \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

8. Toplamaya göre $\{0, 2\} \leqslant \mathbb{Z}_4$, $\{0, 3, 6, 9\} \leqslant \mathbb{Z}_{12}$.

9. Her biri 4 elemanlı olan bu grupların tüm altgruplarını bulun: (Sym($\sqsubset\!\sqsupset$), $\circ$), $(\mathbb{Z}_4, +)$, $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$

10. $\mathbb{Z}_6$'nın ve Sym(Δ)'nın tüm altgruplarını bulun.

Olmayan Örnekler. Neden altgrup olmadıklarını açıklayın.

1. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \nleqslant (\mathbb{Q}, +)$
2. $(\mathbb{Z}_n, +) \nleqslant (\mathbb{Z}, +)$
3. $(\mathbb{Z}_2, +) \nleqslant (\mathbb{Z}_4, +)$
4. $(\mathbb{R}^2, +) \nleqslant (\mathbb{R}^4, +)$
5. $(\{0, 3, 6, 9, 12\}, +) \nleqslant (\mathbb{Z}_{13}, +)$

Alıştırma 5. (a) Eğer H_1, $H_2 \leqslant G$ ise $H_1 \cap H_2 \leqslant G$ olduğunu kanıtlayın.
(b) I herhangi bir indeks kümesi olsun. Eğer her $i \in I$ için, $H_i \leqslant G$ ise $\bigcap_{i \in I} H_i \leqslant G$ olduğunu kanıtlayın.

2C Üreteçler

Örnek 5. $(\mathbb{Z}, +)$ grubunda 2'yi içeren en küçük altgrubu bulmanız istendiğinde öncelikle birim elemanı ve verilen eleman(lar)ı kümenize koymanız gerekir. Sonra tersleri ve çarpımları (burada toplamları!) ekleyin, sonra yeni gelen elemanların terslerini ve kümenizde bulunan her iki elemanın çarpımını ekleyerek altgrubun tamamını bulmaya çalışın. Bu örnekte $\{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}$ elde edileceğinden yanıt $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ altgrubudur.

Alıştırma 6. (a) $(\mathbb{Z},+)$ grubunda 1'i (veya -1'i) içeren en küçük altgrubun $\mathbb{Z}$'nin kendisi olduğunu kanıtlayın.
(b) Her $n \geqslant 2$ için $(\mathbb{Z}_n,+)$ grubunda 1'i (veya $n-1$'i) içeren en küçük altgrubun $\mathbb{Z}_n$'nin kendisi olduğunu kanıtlayın.
(c) $(\mathrm{Sym}(\Delta),\circ)$ grubunda $2\pi/3$'lük döndürmeye ρ, dikey eksene göre olan yansımaya a diyelim. Bu grupta ρ'yu içeren en küçük altgrubun $\{\mathrm{id},\rho,\rho^2\}$ olduğunu kanıtlayın. Bu grupta a'yı içeren en küçük altgrubu bulun. Son olarak ρ'yu ve a'yı (ikisini birden) içeren en küçük altgrubu bulun.

Gözlem ve Tanım. G bir grup ve $S \subseteq G$ bir altküme olsun. G'de S'yi içeren en küçük altgrubu bundan sonra $\langle S\rangle$ ile göstereceğiz. $\langle S\rangle$, G'de olup S'yi içeren tüm altgrupların kesişimine eşittir. (Bu cümleyi Alıştırma 5 yardımı ile kanıtlayın.) Eğer $\langle S\rangle = G$ ise S kümesine G'nin *üreteç kümesi* denir.

Bu notasyona göre yukarıdaki örneklerin bazılarını yeniden yazalım: $(\mathbb{Z},+)$ grubunda $\langle 1\rangle = \langle -1\rangle = \mathbb{Z}$, $\langle 2\rangle = \langle -2\rangle = 2\mathbb{Z}$, $\langle 0\rangle = \{0\}$, her $m \in \mathbb{Z}$ için $\langle m\rangle = \langle -m\rangle = m\mathbb{Z}$ olur. $(Sym(\Delta),\circ)$ grubunda $\langle \rho\rangle = \{\mathrm{id},\rho,\rho^2\}$, $\langle a\rangle = \{\mathrm{id},a\}$, $\langle \rho,a\rangle = \mathrm{Sym}(\Delta)$ olur.

Tanım. Bir eleman tarafından üretilen gruplara *devirli* grup denir.

Örnek 6. Toplamaya göre $\mathbb{Z}$ ve her $n \geqslant 1$ için $\mathbb{Z}_n$ grupları devirlidir.

Alıştırma 7. (a) Oklu düzgün n-gonun simteri grubunun devirli olduğunu kanıtlayın. (Daha sonra bu grubun $\mathbb{Z}_n$ grubuna *izomorfik* olduğunu göreceğiz.)
(b) $\mathrm{Sym}(\Delta)$ grubunun devirli olmadığını kanıtlayın.
(c) Eleman sayısı 6'dan az olan ve devirli olmayan bir grup var mı? Açıklayın.
(d) Tüm $3 \leqslant n \leqslant 8$ değerleri için hangi $\mathbb{Z}_n^*$ gruplarının devirli olduğunu bulun. Tüm gruplar için üreteç kümesi yazın.
(e) $\mathbb{Z} = \langle 2,3\rangle$ olduğunu kanıtlayın.
(f) $(\mathrm{Sym}(\square),\circ)$ grubunun tüm üreteç kümelerini bulun.

Lemma 2.1. *Burada $n \geqslant 2$ ve $0 < a < n$ olsun, $\mathbb{Z}_n = \langle a\rangle$ olması için gerek ve yeter koşul* $\mathrm{ebob}(a,n) = 1$ *olmasıdır.*

Kanıt. Alıştırma 4'ü kullanabilirsiniz.

Alıştırma 8. Doğru mu, yanlış mı? $n \geqslant 2$ olsun. $\mathbb{Z}_n$'nin tam olarak $n-1$ üretecinin olması için gerek ve yeter koşul n'nin asal sayı olmasıdır.