Önermeler mantığı

David Pierce

1 Aralık 2014

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/
dpierce@msgsu.edu.tr

Bu yazı, bölümümün Öklid Geometrisine Giriş dersi için hazırlanmıştır. Yazının ana kaynakları, Church'un [2], Shoenfield'in [8], Burris'in [1], ve Nesin'in [5] kitapları ve *Foundations of Mathematical Practice* (Eylül 2010) adlı notlarımdır. Bazı terimler, [3, 4] kaynaklarından alınmıştır.

İçindekiler

Şekil Listesi

1 Önermeler

Önerme, (1) belli bir *durumda* (2) *doğru* veya *yanlış* denebilen (3) *cümledir.*

- **Cümle** (veya *tümce*), günlük dilden bilinir. Çağdaş matematikte bazen bir cümle, simgeler listesi olarak yazılıyor, örneğin

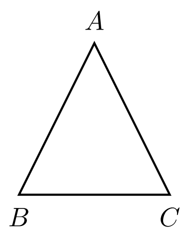
  $$\forall x \; \exists y \; x * y = \mathrm{e}.$$

  Bu örnek, "Her sayının tersi var" cümlesi için sadece bir kısaltmadır.

- **Durum** matematikte çoğunlukla bir *yapıdır.* Örneğin çarpma işlemi ve *bir* elemanı ile doğal sayılar, $(\mathbb{N}, \times, 1)$ olarak yazılabilen yapı oluşturur. Öklid geometrisinde bir durum, Şekil 1'deki gibi *harfli diyagram* olabilir.

- **Doğru** ve **yanlış,** örneklerden anlanır. "Her sayının tersi var" önermesi,

  - $(\mathbb{N}, \times, 1)$ yapısında yanlış,



Şekil 1: Bir üçgen

- $(\mathbb{Q}^+, \times, 1)$ yapısında doğru,*
- $(\omega, +, 0)$ yapısında yanlış,†
- $(\mathbb{Z}, +, 0)$ yapısında doğrudur.

Doğru ve yanlış, **doğruluk değerleridir.** *Doğru* doğruluk değerini

$$1$$

olarak, *yanlış* doğruluk değerini de

$$0$$

olarak yazacağız.‡ Belli bir durumda, bir önerme doğru ise, o önermenin o durumdaki doğruluk değeri 1'dir; yanlış ise, önermenin durumdaki doğruluk değeri 0'dır.

Her durum bir **doğruluk göndermesi** belirtir. Bu gönderme her önermeyi o durumdaki doğruluk değerine gönderir. Mesela d_1 doğruluk göndermesi $(\mathbb{N}, \times, 1)$ yapısından tarafından belirtilsin. O zaman

$$d_1(\text{“Her sayının tersi var”}) = 0.$$

Ancak d_2 doğruluk göndermesi $(\mathbb{Q}^+, \times, 1)$ yapısından tarafından belirtilirse, o zaman

$$d_2(\text{“Her sayının tersi var”}) = 1.$$

*$\mathbb{Q}^+$, sıfırdan büyük olan kesirli sayılar kümesidir, yani $\mathbb{Q}^+ = \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0\}$.

†ω, negatif olmayan tamsayılar kümesidir, yani $\omega = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x \geqslant 0\}$.

‡1 ve 0 yerine D ve Y, ya da $\top$ ve $\perp$, işaretleri kullanılabilir.

2 Bileşke önermeler

Bağlaçlarla verilmiş önermelerden **bileşke önerme** yapılabilir, ve onun doğruluk değeri verilmiş önermelerin değerlerinden bulunabilir.

Mesela iki önermemiz olsun, ve onlara P ve Q diyelim.* O zaman "P ve Q" önermesini oluşturabiliriz. Her durumda, bu yeni önerme doğrudur ancak ve ancak P doğrudur ve Q de doğrudur. "P ve Q" önermesini $P \wedge Q$ olarak yazalım, ve d bir doğruluk göndermesi olsun. O zaman

$$d(P \wedge Q) = 1 \text{ ancak ve ancak } d(P) = 1 \text{ ve } d(Q) = 1.$$

Genellikle $(d(P), d(Q))$ sıralı ikilisi için dört tane seçenek vardır. Her seçenekteki $P \wedge Q$ önermesinin değeri, aşağıdaki gibi bir **doğruluk tablosunda** gösterilir.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Birçok önemli matematiksel önerme "P ise Q" biçimindedir. Bu biçimi $P \to Q$ (veya $P \Rightarrow Q$) olarak yazarız. Her d doğruluk göndermesi için

$$d(P \to Q) = 1 \text{ ancak ve ancak } d(P) = 0 \text{ veya } d(Q) = 1.$$

*Q harfi, *kü* veya *kyü* gibi telaffuz edilebilir.

$P \to Q$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Örneğin Öklid'in 6. önermesine bakalım [6]:

Eğer bir üçgenin iki açısı birbirine eşit ise,
eşit açıların gördüğü kenarlar da eşittir.

Şekil 1'deki ABC üçgenini bir yapı olarak düşünebiliriz, ve bu yapı için, bir d doğruluk göndermesi vardır. Şimdi

- P, "B köşesindeki açı C köşesindeki açıya eşittir" önermesi olsun;
- Q, "AC kenarı AB kenarına eşittir" önermesi olsun.

O zaman Öklid'in 6. önermesine göre $d(P \to Q) = 1$, yani

$$\text{ya } d(P) = 0 \text{ ya da } d(Q) = 1.$$

Alıştırma 1. Yukarıdaki P ve Q için, öyle bir yapı bulun ki, bu yapıda $d(P \to Q) = 0$ olsun. (*İpucu*: C köşesindeki açı ACB açısı olmayabilir, çünkü yapı bir üçgen olmayabilir.)

Sözcüklerde ve simgelerde kullanacağımız tüm bileşke önermeler Şekil 2'dedir.[†] Onların tüm olası doğruluk değerleri, Şekil 3'teki doğruluk tablolarında gösterilmiştir. $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, ve $\neg$ işaretlerine **bağlayıcı** deriz. Hatırlamak için: Latince *VEL* bağlacı "veya" demektir, onun için "veya" $\vee$ olarak yazılır. İngilizce *AND* bağlacı "ve" demektir, ve $\wedge$ işareti A gibidir. Ayrıca kümeler kuramında

[†] Başka kaynaklarda $P \wedge Q$ yerine $P \,\&\, Q$, $P \to Q$ yerine $P \Rightarrow Q$ veya $P \supset Q$, $P \leftrightarrow Q$ yerine $P \Leftrightarrow Q$, ve $\neg P$ yerine $\sim P$ veya P' kullanılır.

P ve Q	$P \wedge Q$
P veya Q	$P \vee Q$
P ise Q	$P \to Q$
P ancak ve ancak Q	$P \leftrightarrow Q$
P değil	$\neg P$

Şekil 2: Bağlayıcılar

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

P	$\neg P$
0	1
1	0

Şekil 3: Temel doğruluk tabloları

$$x \in A \cup B \text{ demek } x \in A \text{ veya } x \in B,$$
$$x \in A \cap B \text{ demek } x \in A \text{ ve } x \in B.$$

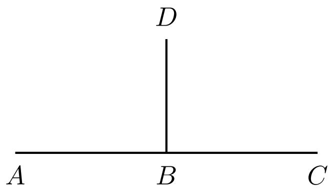
Öklid'in 13. önermesi $P \vee Q$ biçimindedir. O önerme aşağıdaki gibidir:

Eğer bir doğru bir doğrunun üzerine konulursa,
yaptığı açılar, ya iki dik
ya da iki dik açıya eşit olacaktır.

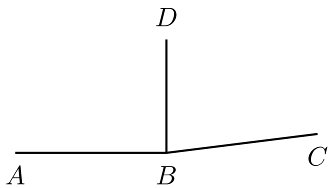
Şekil 4'te ABC bir doğru olsun, ve BD başka bir doğru olsun. Bu durum için, bir d doğruluk göndermesi vardır. Şimdi

- P, "ABD ve CBD açıları diktir" önermesi olsun, ve
- Q, "ABD ve CBD açıları iki dik açıya eşittir" önermesi olsun.

O zaman Öklid'in 13. önermeye göre



Şekil 4: Bir doğrunun üzerine bir doğru



Şekil 5: İki bitişik açı

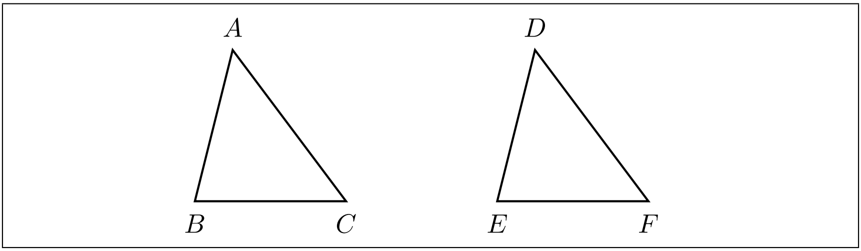
$$\text{ya } d(P) = 1 \text{ ya da } d(Q) = 1.$$

Bir önermede birden fazla bağlayıcı bulunabilir. Aslında Öklid'in 13. önermesi böyle düşünülebilir. Şekil 5'teki gibi ABD ve DBC bitişik açılar olsun, ve d bu durum için doğruluk göndermesi olsun. Ayrıca

- P ve Q, yukarıdaki gibi olsun,
- F, $P \vee Q$ önermesi olsun, ve
- R, "AB ve BC doğruları bir doğrudadır" önermesi olsun.

O zaman Öklid'in 13. önermeye göre $d(R \to F) = 1$. Üstelik 14. önermeye göre $d(Q \to R) = 1$; ve dik açının tanımından ve dördüncü postulattan $d(P \to R) = 1$. Bu şekilde $d(F \to R) = 1$. Sonunda, tüm bunlara göre $d(R \leftrightarrow F) = 1$.

Başka bir örnek için, Öklid'in 4. önermesine bakalım:



Şekil 6: İki üçgen

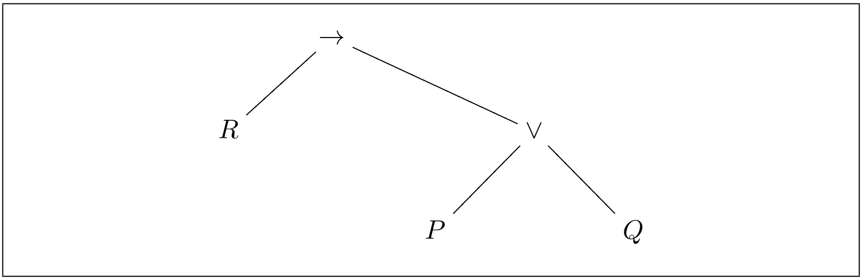
Eğer iki üçgenin iki kenarı iki kenara eşit olursa, her biri birine,
ve açı açıya eşit olursa, yani eşit doğrular tarafından içerilen,
hem taban tabana eşit olacak,
hem üçgen üçgene eşit olacak,
hem de geriye kalan açılar geriye kalan açılara eşit olacak, her biri birine,
yani eşit kenarları görenler.

Bu önerme, $F \to G$ biçimindedir, ama F ve G önermelerin kendisi, bileşkedir. Aslında Şekil 6'yı kullanarak

- P_1, "AB kenarı DE kenarına eşittir" önermesi olsun,
- P_2, "AC kenarı DF kenarına eşittir" önermesi olsun,
- P_3, "BAC açısı EDF açısına eşittir" önermesi olsun,
- P_4, "BC kenarı EF kenarına eşittir" önermesi olsun,
- P_5, "ABC üçgeni DEF üçgenine eşittir" önermesi olsun,
- P_6, "ABC açısı DEF açısına eşittir" önermesi olsun, ve
- P_7, "ACB açısı DFE açısına eşittir" önermesi olsun.

Ayrıca

- F, $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ önermesi olsun, ve
- G, $P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7$ önermesi olsun.



Şekil 7: Ağaç olarak bir önerme

ABC ve DEF üçgenleri için bir d doğruluk göndermesi vardır, ve Öklid'in 4. önermeye göre, $d(F \to G) = 1$ olur, yani $d(F) = 0$ veya $d(G) = 1$. Üstelik $d(F) = 1$ ancak ve ancak

$$d(P_1) = d(P_2) = d(P_3) = 1;$$

ve $d(G) = 1$ ancak ve ancak

$$d(P_4) = d(P_5) = d(P_6) = d(P_7) = 1.$$

Bileşke bir önermenin bağlayıcılarından sadece biri, önermenin **ana bağlayıcısıdır.** Tekrar Öklid'in 13. ve 14. önermeleri örneğine bakın. Orada $R \to F$ önermesinin ana bağlayıcısı, $\to$ bağlayıcısıdır. O önermede $\lor$ bağlayıcısı bulunur, ama bu, önermenin ana bağlayıcısı değil, F önermesinin ana bağlayıcısıdır.

F önermesinin $P \lor Q$ olduğu $R \to F$ önermesi, şu anda $R \to P \lor Q$ olarak yazılamaz, çünkü bu ifade, önermenin ana bağlayıcısını göstermez. Önermemiz $R \to (P \lor Q)$ gibi bir ifade olarak yazılabilir veya Şekil 7'deki *ağaç* olarak çizilebilir.

$P_1 \land P_2 \land P_3$ önermesinin ana bağlayıcısı bir $\land$ bağlayıcısıdır, ama hangisi? Bu önermede $\land$ bağlayıcısının iki **geçişi** vardır.[‡] Hangisinin ana bağlayıcı

[‡] *Geçiş* terimini [4] kitabından aldım; İngilizcesi, *occurrence.*

olduğu fark etmez. (Neden?) Kesinlik için son geçiş olsun diyelim. O zaman

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \text{ demek } P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3) \text{ demektir.}$$

Aynı şekilde

$$P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7 \text{ demek } P_4 \wedge (P_5 \wedge (P_6 \wedge P_7)).$$

Ancak $P \to Q \to R$ önermesindeki $\to$ bağlayıcısının hangi geçişinin önermenin ana bağlayıcısı olduğu önemlidir. (Neden?) Tekrar son geçiş olsun diyelim:

$$P \to Q \to R \text{ demek } P \to (Q \to R) \text{ demek olsun.}$$

3 Önerme formülleri

Gerçekten P, Q, ve R gibi Latin harfleri, ve P_1 ve P_2 gibi bileşke simgeler, önerme değil, **önerme değişkenleridir.** Aşağıdaki tanıma göre önerme değişkenlerinden **önerme formülleri** oluştururuz.

1. Her önerme değişkeni, bir önerme formülüdür.
2. F ve G önerme formülleriyse
$$(F \land G), \qquad (F \lor G), \qquad (F \to G), \qquad (F \leftrightarrow G)$$
ifadeleri de önerme formülleridir.
3. F, önerme formülüyse,
$$\neg F$$
ifadesi de bir önerme formülüdür.
4. 1 ve 0 simgeleri, önerme formülleridir.

Örneğin P, $(P \land Q)$, $(R \lor 1)$, $((P \land Q) \to (R \lor 1))$, $\neg((P \land Q) \to (R \lor 1))$, ve $(\neg((P \land Q) \to (R \lor 1)) \leftrightarrow 0)$ ifadeleri, önerme formülleridir. Buradaki $\land$, $\lor$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$, 1, ve 0 simgeleri, **bağlayıcıdır.** Üstelik

- $\land$, $\lor$, $\to$, ve $\leftrightarrow$ bağlayıcılarına **iki konumlu,**
- $\neg$ bağlayıcısına **bir konumlu,**
- 0 ve 1 bağlayıcına **sıfır konumlu** denebilir.

F, G, H, K ve L Latin harfleri her zaman önerme formüllerini gösterecek; $*$ ve $\dagger$ simgeleri, iki konumlu bağlayıcılarını gösterecek. F gibi harfin kendisi formül değildir; $*$ gibi simgenin kendisi bağlayıcı değildir.

F ve G formül olarak ve $*$ iki konumlu bağlayıcı olarak anlanırsa, o zaman tanıma göre

(1) önerme değişkenleri,
(2) $(F * G)$,
(3) $\neg F$,
(4) 0 ve 1,

önerme formülleridir. Bu önerme formülleri tanımı **özyinelemelidir.*** Bu nedenle önerme formülleri hakkında teoremler, **tümevarım** yöntemiyle kanıtlanabilir. Aşağıdaki teorem bir örnektir.

Teorem 1. *Eğer bir $(F * G)$ formülü, bir $(H \dagger K)$ formülü ile aynı ise, o zaman F ve H formülleri de birbiriyle aynıdır.*

Kanıt. Bir önerme formülünün sonuna yeni simgeler eklenerek yeni önerme formülünün elde edilemeyeceğini göstermek yeter. Aslında her L formülü için

- hem sonuna yeni simgeler eklenerek
- hem de sonundan simgeler kaldırılarak

yeni önerme formülünün elde edilemeyeceğini göstereceğiz. Formüller tanımının sağladığı tümevarım yöntemini kullanacağız.

1. L bir önerme değişkeniyse, iddiamız doğrudur.

2. L ya F ya da G formülü ise, iddiamızın doğru olduğunu varsayalım. Şimdi L, bir $(F * G)$ formülü olsun.† Mümkünse, sonuna yeni simgeler eklenerek veya sonundan simgeler kaldırılarak yeni bir formül çıkar. Bu formül $(H \dagger K)$ biçiminde olmalıdır (neden?). Eğer F ve H birbiriyle aynıysa, o zaman ya G, K formülünün başından bir parçasıdır, ya da K, G formülünün başından bir parçasıdır. Varsayımımıza göre bu mümkün değildir. Aynı şekilde F ve H birbirinden farklı olamaz. Böylece L, bir $(F * G)$ formülü ise, iddiamız doğrudur.

3. Benzer şekilde L formülünün bir F formülü olduğu zamanda iddiamız doğru ise, L formülünün $\neg F$ formülü olduğu zamanda da doğrudur.

* [4] kitabında *yinelgendir*; İngilizcesi *recursive.*

† "Bir $(F * G)$ formülü" çünkü $(F * G)$ demek $(F \wedge G)$ veya $(F \vee G)$ veya $(F \to G)$ veya $(F \leftrightarrow G)$.

4. L ya 0 ya da 1 ise, iddiamız doğrudur.

Böylece her durumda iddiamız doğrudur. □

Alıştırma 2.

1. Eğer her $(F * G)$ formülü sadece $F * G$ olarak yazılırsa, teoremin yanlış olduğunu gösterin.
2. Eğer her $(F * G)$ formülü $(F * G$ olarak yazılırsa, teoremin hala doğru olduğunu gösterin.
3. Eğer her $(F * G)$ formülü $F * G)$ olarak yazılırsa, teorem hala doğru mudur?

Teorem sayesinde bir $(F * G)$ önerme formülünün $*$ bağlayıcısı, formülün **ana bağlayıcısı** olarak tanımlanabilir. Benzer şekilde $\neg F$ formülünün ana bağlayıcısı $\neg$ simgesidir. 0 veya 1, kendisinin ana bağlayıcısıdır. Ancak bir değişkenin ana bağlayıcısı yoktur. Böylece her değişken olmayan formülün sadece bir tane ana bağlayıcısı vardır.

Teorem sayesinde de aşağıdaki **özyinelemeli tanımı** yapabiliriz. Bir önerme formülünün **alt formüllerini** tanımlıyoruz. Her önerme formülü, kendisinin alt formülüdür. Ayrıca

- F veya G formülünün her alt formülü, her $(F * G)$ formülünün bir alt formülüdür.
- F formülünün her alt formülü $\neg F$ formülünün bir alt formülüdür.

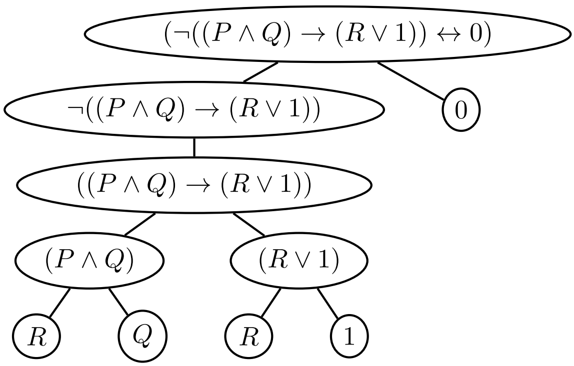
Örneğin $(\neg((P \wedge Q) \to (R \vee 1)) \leftrightarrow 0)$ formülünün alt formülleri, Şekil 8'deki tabloda sıralanmıştır. Aynı formülün alt formülleri, veya alt formüllerin ana bağlayıcıları, Şekil 9 ve 10'daki gibi bir (ve tek bir) ağacın *düğümleri* olarak çizilebilir.

Teorem 2. *Bir formülde, her değişken veya ayraç olmayan simge, bir ve sadece bir alt formülün ana bağlayıcısıdır.*

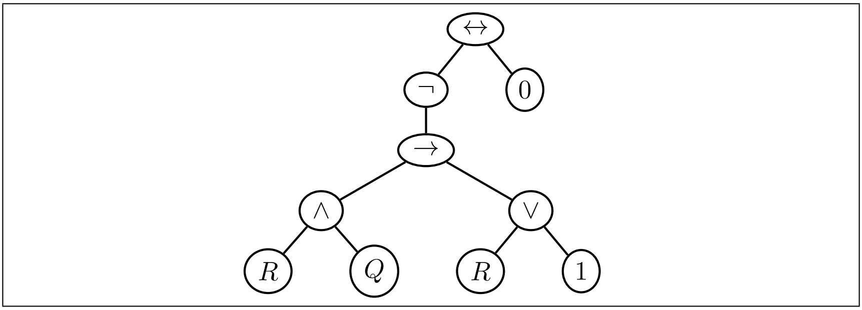
Kanıt. Tümevarımı kullanacağız.

alt formül	ana bağlayıcısı
$(\neg((P \wedge Q) \to (R \vee 1)) \leftrightarrow 0)$	$\leftrightarrow$
$\neg((P \wedge Q) \to (R \vee 1))$	$\neg$
$((P \wedge Q) \to (R \vee 1))$	$\to$
$(P \wedge Q)$	$\wedge$
P	(yok)
Q	(yok)
$(R \wedge 1)$	$\wedge$
R	(yok)
1	1
0	0

Şekil 8: Bir formülün alt formüller ve ana bağlayıcıları



Şekil 9: Düğümleri formül olan bir ağaç



Şekil 10: Düğümleri bağlayıcı veya değişken olan bir ağaç

1. Bir değişken için iddiamız doğrudur.

2. İddiamız F ve G için doğru olsun. Bir $(F * G)$ formülünün her alt formülü, ya formülün kendisidir, ya F alt formülünün alt formülüdür, ya da G alt formülünün alt formülüdür. Tanıma göre, gördüğümüz $*$ bağlayıcısının geçişi, formülün kendisinin ana bağlayıcısıdır. Dediğimize göre bu $*$ geçişi başka alt formülün ana bağlayıcısı olamaz. Varsayımımıza göre, bir bağlayıcının F formülünde geçişi, F formülünün tek bir alt formülünün ana bağlayıcısıdır. O zaman $(F * G)$ formülünün tek bir alt formülünün ana bağlayıcısıdır. G için aynı şey doğrudur. O zaman her $(F*G)$ formülü için iddiamız doğrudur.

3. Benzer şekilde iddıamız F için doğru ise, $\neg F$ için de doğrudur.

4. İddıamız 0 ve 1 için doğrudur.

Formüllerin özyinelemeli tanımına göre, iddıamız doğrudur. □

Bundan sonra **doğruluk göndermesi,** tüm önerme formülleri kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine Şekil 11'deki kurallara göre tanımlanmış bir fonksiyon anlamına gelecektir. Her doğruluk göndermesinin altında, bir formülün değeri formülün **doğruluk tablosunda** gösteriliyor. F bir önerme formülü ve d bir doğruluk göndermesiyse, $d(F)$ değerini hesaplamak için,

$d(F)$	$d(G)$	$d((F \wedge G))$	$d((F \vee G))$	$d((F \to G))$	$d((F \leftrightarrow G))$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

$d(F)$	$d(\neg F)$
0	1
1	0

$d(1)$
1

$d(0)$
0

Şekil 11: Doğruluk göndermesi kuralları

F formülünün her G alt formülü için $d(G)$ değerini hesaplamalıyız. Bu $d(G)$ değeri, F formülünün doğruluk tablosunda,

1) eğer G bir değişkense, G altında,
2) eğer G değişken değilse, G formülünün ana bağlayıcısı altında,

gösterilebilir. Mesela $(\neg((P \wedge Q) \to (R \vee 1)) \leftrightarrow 0)$ formülü için, Şekil 12'deki doğruluk tablosu çıkar. O zaman formülün kendisinin doğruluk tablosu, Şekil 13'te görünür. Hesaplamaların sırası, Şekil 14'te görünür. Her formülün doğruluk tablosu olduğundan dolayı, aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 3. *Her P önerme değişkeni için bir $d(P)$ doğruluk değeri seçilmiş olsun. O zaman öyle bir $\widehat{d}$ doğruluk göndermesi vardır ki her P için $\widehat{d}(P) = d(P)$.*

Kanıt. Buradaki $\widehat{d}$ doğruluk göndermesi, özyineleme ile tanımlanır. Teorem 1'den dolayı bu mümkündür. □

Son bölümde dediğimiz gibi, önerme formüllerinde bazı ayraçlar gerekmez ve kullanılmayabilir. O zaman doğruluk değerleri aşağıdaki sırada

(	$\neg$	(	(	P	$\wedge$	Q	)	$\rightarrow$	(	R	$\wedge$	1	)	)	$\leftrightarrow$	0	)
	0			0	0	0		1		0	0	1			1	0	
	0			1	0	0		1		0	0	1			1	0	
	0			0	0	1		1		0	0	1			1	0	
	1			1	1	1		0		0	0	1			0	0	
	0			0	0	0		1		1	1	1			1	0	
	0			1	0	0		1		1	1	1			1	0	
	0			0	0	1		1		1	1	1			1	0	
	0			1	1	1		1		1	1	1			1	0	

Şekil 12: Alt formüllerin değerlerini gösteren doğruluk tablosu

P	Q	R	$(\neg((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee 1) \leftrightarrow 0)$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Şekil 13: Formülün kendisinin doğruluk tablosu

(	¬	(	(	P	∧	Q	)	→	(	R	∧	1	)	)	↔	0	)
				0		0				0		1				0	
				1		0				0		1				0	
				0		1				0		1				0	
				1		1				0		1				0	
				0		0				1		1				0	
				1		0				1		1				0	
				0		1				1		1				0	
				1		1				1		1				0	
				0	0	0				0	0	1				0	
				1	0	0				0	0	1				0	
				0	0	1				0	0	1				0	
				1	1	1				0	0	1				0	
				0	0	0				1	1	1				0	
				1	0	0				1	1	1				0	
				0	0	1				1	1	1				0	
				1	1	1				1	1	1				0	
				0	0	0		1		0	0	1				0	
				1	0	0		1		0	0	1				0	
				0	0	1		1		0	0	1				0	
				1	1	1		0		0	0	1				0	
				0	0	0		1		1	1	1				0	
				1	0	0		1		1	1	1				0	
				0	0	1		1		1	1	1				0	
				1	1	1		1		1	1	1				0	
	0			0	0	0		1		0	0	1				0	
	0			1	0	0		1		0	0	1				0	
	0			0	0	1		1		0	0	1				0	
	1			1	1	1		0		0	0	1				0	
	0			0	0	0		1		1	1	1				0	
	0			1	0	0		1		1	1	1				0	
	0			0	0	1		1		1	1	1				0	
	0			1	1	1		1		1	1	1				0	
	0			0	0	0		1		0	0	1			1	0	
	0			1	0	0		1		0	0	1			1	0	
	0			0	0	1		1		0	0	1			1	0	
	1			1	1	1		0		0	0	1			0	0	
	0			0	0	0		1		1	1	1			1	0	
	0			1	0	0		1		1	1	1			1	0	
	0			0	0	1		1		1	1	1			1	0	
	0			1	1	1		1		1	1	1			1	0	

Şekil 14: Doğruluk tablosu hesaplanması

hesaplanır.

1) 0 ve 1,
2) $\neg$,
3) $\wedge$ ve $\vee$,
4) $\to$ ve $\leftrightarrow$,
5) bir bağlayıcının iki geçişi varsa, sağdaki.

Örneğin:

a) $F * G$ demek $(F * G)$,
b) $\neg F * G$ ve $\neg(F * G)$ farklıdır,
c) $F \to G \vee H$ demek $F \to (G \vee H)$,
d) $F \wedge G \vee H$ belirsiz (onun için yazılmaz),
e) $F \wedge G \wedge H$ demek $F \wedge (G \wedge H)$,
f) $F \to G \to H$ demek $F \to (G \to H)$,
g) $F \to G \wedge H \to K$ demek $F \to ((G \wedge H) \to K)$.

Alıştırma 3. Aşağıdaki değişkensiz formülleri hesaplayın.

a) $1 \to 1 \to 1$,
b) $1 \to 0 \to 1$,
c) $(0 \to 1) \leftrightarrow 1$,
d) $(0 \leftrightarrow 1) \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 1$,
e) $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 1$,
f) $\neg\neg\neg 0$,
g) $(1 \vee 0) \wedge 0$,
h) $1 \vee (0 \wedge 0)$.

Alıştırma 4. Aşağıdaki formüllerin doğruluk tablolarını yapın:

a) $P \to Q \to P$,
b) $P \wedge Q \wedge R$,
c) $\neg(P \leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow R))$,
d) $(P \to Q \vee R) \to \neg P \vee Q$,
e) $(P \to Q \vee \neg R) \wedge (Q \to P \wedge R) \to P \to R$,
f) $\neg(\neg R \to P \to \neg(R \to Q))$.

4 Denklik

İki önermenin doğruluk değeri her durumda aynıysa, o önermeler, mantıksal olarak birbirine **eşdeğer** veya **denktir.**

İki önerme *formülünün* doğruluk tabloları aynıysa, o formüller de birbirine **eşdeğer** veya **denktir.** Her formül kendisine de denktir.

Zaten sayfa 10'da başlayan Öklid'in 13. ve 14. önermeleri örneğinde denklikler kullandık. Mesela $P \vee Q \to R$ önermesi $(P \to R) \wedge (Q \to R)$ önermesine denktir ($P \vee Q \to R$ ifadesinin $((P \vee Q) \to R)$ demek olduğunu hatırlayın). Bu önermelerin doğruluk tablolarını hesaplayalım:

P	$\vee$	Q	$\to$	R
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

(	P	$\to$	R	)	$\wedge$	(	Q	$\to$	R	)
	0	1	0		1		0	1	0	
	1	0	0		0		0	1	0	
	0	1	0		0		1	0	0	
	1	0	0		0		1	0	0	
	0	1	1		1		0	1	1	
	1	1	1		1		0	1	1	
	0	1	1		1		1	1	1	
	1	1	1		1		1	1	1	

Böylece Şekil 15'teki tabloları elde ederiz. Bu tablolar, birbiriyle aynıdır; onun için

$$P \vee Q \to R \text{ denktir } (P \to R) \wedge (Q \to R)$$

ifadesini yazarız. Genelde, F ve G önerme formülleri eşdeğer ise,

$$F \sim G$$

ifadesini yazabiliriz. Örneğin

$$P \vee Q \to R \sim (P \to R) \wedge (Q \to R).$$

P	Q	R	$P \vee Q \to R$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

P	Q	R	$(P \to R) \wedge (Q \to R)$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Şekil 15: İki formülün doğruluk tabloları

Ancak, dikkatli olunmalı: $F \sim G$ ifadesi önerme formülü değil; sadece "F ve G formülleri, birbirine denktir" cümlesi için, yani

$$F \text{ denktir } G$$

cümlesi için, bir kısaltmadır.

Bir $F \to G$ önerme, **koşullu önermedir,** ve onun

1) **tersi** veya **evriği,** $G \to F$ cümlesidir,
2) **karşıt tersi,** $\neg G \to \neg F$ cümlesidir.

Teorem 4. *Bir koşullu önerme,*

1) tersine denk olmayabilir,
2) karşıt tersine her zaman denktir.

Kanıt. **Alıştırma 5.** □

Teorem 5. *Aşağıdaki eşdeğerliklerimiz vardır.*

1. Her önerme, sadece $\neg$ ve $\wedge$ ile yazılabilir:

$$P \vee Q \textit{ denktir } \neg(\neg P \wedge \neg Q),$$

$$P \to Q \text{ denktir } \neg P \vee Q,$$
$$P \leftrightarrow Q \text{ denktir } (P \to Q) \wedge (Q \to P).$$

2. *Her önerme, sadece* $\neg$ *ve* $\to$ *ile yazılabilir:*

$$P \wedge Q \text{ denktir } \neg(P \to \neg Q).$$

3. *Çifte değilleme kaldırılabilir:*

$$\neg\neg P \text{ denktir } P.$$

4. *De Morgan* kuralları:*

$$\neg(P \vee Q) \text{ denktir } \neg P \wedge \neg Q,$$
$$\neg(P \wedge Q) \text{ denktir } \neg P \vee \neg Q.$$

5. $\wedge$ *ve* $\vee$ *bağlayıcılarının değişme ve birleşme özellikleri:*

$$P \wedge Q \text{ denktir } Q \wedge P, \qquad (P \wedge Q) \wedge R \text{ denktir } P \wedge (Q \wedge R),$$
$$P \vee Q \text{ denktir } Q \vee P, \qquad (P \vee Q) \vee R \text{ denktir } P \vee (Q \vee R).$$

6. $\wedge$ *ve* $\vee$ *bağlayıcıları birbiri üzerine dağılır:*

$$P \wedge (Q \vee R) \text{ denktir } (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$$
$$P \vee (Q \wedge R) \text{ denktir } (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

7. *Fazlalıklar:*

$$\begin{array}{cc}
P \wedge P \text{ denktir } P, & P \vee P \text{ denktir } P, \\
P \wedge \neg P \text{ denktir } 0, & P \vee \neg P \text{ denktir } 1, \\
P \wedge 1 \text{ denktir } P, & P \vee 0 \text{ denktir } P, \\
P \wedge 0 \text{ denktir } 0, & P \vee 1 \text{ denktir } 1.
\end{array}$$

8. *Yeni değişken:*

$$P \text{ denktir } (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q),$$
$$P \text{ denktir } (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q).$$

*Augustus De Morgan, 1806–71, Büyük Britanyalı matematikçi ve mantıkçı [9, 10].

9. Yutma:

$$P \wedge (P \vee Q) \text{ denktir } P,$$
$$P \vee (P \wedge Q) \text{ denktir } P.$$

Kanıt. **Alıştırma 6.** □

Bu teoremden, aşağıdaki teoremi kullanarak, sonsuz sayıda denklikler elde edebiliriz. Örneğin $P \to Q$ formülü $\neg P \vee Q$ formününe denk olduğundan

$$P \wedge Q \to R \text{ denktir } \neg(P \wedge Q) \vee R$$

denkliğini elde ederiz.

Teorem 6 (Değiştirim)**.** *F ve G birbirine denk olan formüller olsun, P bir önerme değişkeni olsun, ve H bir önerme formülü olsun. Eğer F formülünde P değişkeninin geçtiği her yere H konulursa, F' formülü elde edilsin; benzer şekilde, G formülünden G' elde edilsin. O zaman*

$$F' \text{ denktir } G'.$$

Kanıt. F veya G formülünün değişkenleri P, Q_1, Q_2, $\dots$, Q_n olsun, d bir doğruluk göndermesi olsun, ve d^* öyle bir doğruluk göndermesi olsun ki

$$d^*(P) = d(H), \qquad d^*(Q_1) = d(Q_1), \qquad \dots, \qquad d^*(Q_n) = d(Q_n)$$

olsun. O zaman $d(F') = d^*(F)$ (neden?), ve aynı şekilde $d(G') = d^*(G)$. O zaman $d^*(F) = d^*(G)$ olduğundan $d(F') = d(G')$. □

Alıştırma 7. Son kanıtta $d(F') = d^*(F)$ eşitliğini gösterin.

Teoremde F' ve G' formülleri, F ve G formüllerinde P değişkeninin H formülü ile **değiştirimiyle** elde edilir.

Üstelik $\neg(P \wedge Q)$ formülü $\neg P \vee \neg Q$ formülüne denk olduğundan, sonraki teorem sayesinde,

$$\neg(P \wedge Q) \vee R \text{ denktir } (\neg P \vee \neg Q) \vee R$$

denkliğini elde ederiz.

Teorem 7 (Yerine Koyma). *F formülü G formülünün bir alt formülü olsun, ve F^* formül F formülüne denk olsun. Eğer G formülünde F alt formülünün yerine F^* konulursa, G^* formülü elde edilsin. O zaman*

$$G \text{ denktir } G^*.$$

Kanıt. **Alıştırma 8.** □

Teoremde G^* formülü, G formülündan **yerine koymakla** elde edilir. Şimdi aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 8. $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$ *denktir* $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge S)$.

Kanıt. Aşağıdaki denkliklerimiz vardır.

$$\begin{aligned}
& (P \vee Q) \wedge (R \vee S) & \\
\sim\ & ((P \vee Q) \wedge R) \vee ((P \vee Q) \wedge S) & [\text{Dağılma}] \\
\sim\ & (R \wedge (P \vee Q)) \vee (S \wedge (P \vee Q)) & [\text{Değişme}] \\
\sim\ & ((R \wedge P) \vee (R \wedge Q)) \vee ((S \wedge P) \vee (S \wedge Q)) & [\text{Dağılma}] \\
\sim\ & (R \wedge P) \vee (R \wedge Q) \vee (S \wedge P) \vee (S \wedge Q) & [\text{Birleşme}] \\
\sim\ & (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge S) & [\text{Değişme}]
\end{aligned}$$

Bu ispatın her adımında, Değiştirim veya Yerine Koyma işlemlerini (veya ikisini) kullandık. □

Benzer şekilde:

Teorem 9.

$$\begin{aligned}
&\neg P \vee (P \wedge Q) \text{ denktir } \neg P \vee Q, \qquad && \neg P \wedge (P \vee Q) \text{ denktir } \neg P \wedge Q, \\
&P \vee (\neg P \wedge Q) \text{ denktir } P \vee Q, && P \wedge (\neg P \vee Q) \text{ denktir } P \wedge Q.
\end{aligned}$$

Kanıt. Aşağıdaki denkliklerimiz vardır.

$$\begin{aligned}
&\neg P \vee (P \wedge Q) && \\
\sim\ & (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) && \text{[Dağılma]} \\
\sim\ & 1 \wedge (\neg P \vee Q) && \text{[Fazlalık]} \\
\sim\ & \neg P \vee Q && \text{[Fazlalık]}
\end{aligned}$$

Diğer denklikler, **Alıştırma 9.** □

5 Gerektirme

Sayfa 24'teki tanıma göre, eğer her d doğruluk göndermesi için $d(F) = d(G)$ ise, o zaman F ve G birbirine denktir. Yani her d için

- $d(F) = 1$ ise $d(G) = 1$,
- $d(G) = 1$ ise $d(F) = 1$

durumunda F denktir G. Şimdi her d için $d(F) = 1$ ise $d(G) = 1$ olduğunu varsayalım. O zaman F formülü G formülünü **gerektirir** deriz.

Her formül kendisini gerektirir. Aşikâr olmayan örnek olarak Şekil 16'daki doğruluk tablosundan

$$P \vee Q \to R \text{ gerektirir } P \to R.$$

Tablodaki her satırda, ya $P \vee Q \to R$ formülünün değeri 0, ya da $P \to R$ formülünün değeri 1. Tabii ki ikisi de olabilir. Genelde, F formülü G formülünü gerektirirse,

$$F \vDash G$$

ifadesini yazabiliriz. Bu ifade, "F formülü G formülünü gerektirir" cümlesi için, yani

$$F \text{ gerektirir } G$$

cümlesi için, bir kısaltmadır. Örneğin

$$P \vee Q \to R \vDash P \to R.$$

Teorem 10. *Aşağıdaki gerektirmelerimiz vardır.*

Basitleştirme:

$$P \wedge Q \textit{ gerektirir } P, \qquad P \wedge Q \textit{ gerektirir } Q.$$

P	Q	R	$P \vee Q \to R$	$P \to R$
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	0	0	0
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Şekil 16: Gerektirmeyi gösteren bir doğruluk tablosu

Ekleme:

$$P \text{ gerektirir } P \vee Q, \qquad Q \text{ gerektirir } P \vee Q.$$

Kanıt. **Alıştırma 10.** □

İki formül de bir formülü gerektirebilir. F ve G formülleri H formülünü gerektirir, ancak ve ancak her d doğruluk göndermesi için ya $d(F) = 0$, ya $d(G) = 0$, ya da $d(H) = 1$. Mesela Şekil 17'deki doğruluk tablosundan

$$P \to Q \text{ ile } Q \to R \text{ gerektirir } P \to R.$$

Aslında sadece 1., 5., 7., ve 8. satırlarda hem $P \to Q$ ve $Q \to R$ doğru, ve o satırlarda $P \to R$ de doğrudur. Ancak $P \to R$ ve $P \to Q$, $Q \to R$ formülünü gerektirmez.

Teorem 11. *Aşağıdaki gerektirmelerimiz vardır.*

Bağlama:

$$P \text{ ile } Q \text{ gerektirir } P \wedge Q.$$

Ayırma:

$$P \text{ ile } P \to Q \text{ gerektirir } Q, \qquad P \vee Q \text{ ile } \neg P \text{ gerektirir } Q,$$

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Şekil 17: Gerektirmeyi gösteren bir doğruluk tablosu daha

$$\neg Q \text{ ile } P \to Q \text{ gerektirir } \neg P, \qquad P \vee Q \text{ ile } \neg Q \text{ gerektirir } P.$$

Hipotetik Tasım:

$$P \to Q \text{ ile } Q \to R \text{ gerektirir } P \to R.$$

Kanıt. **Alıştırma 11.** (Hipotetik Tasım gerektirmesini Şekil 17'de ispatladık.) □

İkiden fazla formül, bir formül gerektirebilir. Γ (*Gamma*), bir önerme formülü *kümesi* olsun, ve F, bir önerme formülü olsun. Eğer her d doğruluk göndermesi için

1) ya Γ kümesindeki bir G için $d(G) = 0$,
2) ya da $d(F) = 1$

sağlanıyorsa, o zaman Γ, F formülünü **gerektirir.** Yani Γ, F formülünü gerektirir ancak ve ancak $\Gamma \cup \{F\}$ kümesindeki bütün formüllerin doğruluk tablosunun her satırında,

1) ya Γ kümesindeki bir formül yanlıştır,
2) ya da F formülü doğrudur.

P	Q	R	S	$P \to Q$	$R \to S$	$P \vee R$	$Q \vee S$
0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Şekil 18: Olumlu Dilemma için doğruluk tablosu

Teorem 12 (Olumlu Dilemma)**.** *Aşağıdaki gerektirmemiz vardır.*

$$P \to Q,\ R \to S \text{ ve } P \vee R \text{ gerektirir } Q \vee S.$$

Kanıt. Bu gerektirme, Şekil 18'deki doğruluk tablosundan görünebilir. Aslında sadece 4., 12., 13., 15., ve 16. satırlarda, hem $P \to Q$ hem $R \to S$ hem de $P \vee R$ doğru, ve o satırlarda $Q \vee S$ de doğru. □

Alıştırma 12. $P \vee Q \vee R$, $P \to Q$, ve $Q \to R$ gerektirir R olduğunu gösterin.

Bir önerme formülü, boş küme tarafından gerektirilebilir. Bu durumda, o formüle **(doğrusal) geçerli formül** veya **mantıksal doğru formül** veya **totoloji** denir.* O zaman F bir totoloji, ancak ve ancak her d doğruluk göndermesi için $d(F) = 1$. Mesela,

$$P \vee \neg P, \qquad\qquad 1$$

formülleri, totolojidirler. Aşağıdaki teoremden dolayı yukarıdaki teoremleri kullanarak yeni totolojiler elde edebiliriz.

Teorem 13. *Aşağıdaki denkliklerimiz vardır.*

1. *F ve G formülleri birbirine denktir, ancak ve ancak*
$$F \leftrightarrow G$$
formülü bir totolojidir.
2. *F formülü, G formülünü gerektirir, ancak ve ancak*
$$F \to G$$
formülü bir totolojidir.
3. *F ile G formülleri, H formülünü gerektir, ancak ve ancak*
$$F \wedge G \to H$$
formülü bir totolojidir.
4. *F, G, ve H formülleri, K formülünü gerektir, ancak ve ancak*
$$F \wedge G \wedge H \to K$$
formülü bir totolojidir.

Kanıt. F denktir G, ancak ve ancak her d doğruluk göndermesi için $d(F) = d(G)$, yani $d(F \leftrightarrow G) = 1$. Diğer bölümler, **Alıştırma 13.** □

Sonraki teoremi görmek yararlı olabilir.

*Ali Nesin [5], öyle formüllere *hepdoğru* adını verir.

Teorem 14. *Γ, Δ (*Delta*) kümesinin her elemanını içersin. Yani Γ, Δ kümesini kapsasın ($\Delta \subseteq \Gamma$ olsun).*

$$\Delta \text{ gerektirir } F \text{ ise, o zaman } \Gamma \text{ gerektirir } F.$$

Kanıt. Gerektirme tanımından gelir. □

Bu teorem, sonraki teoremin özel durumudur.

Teorem 15. *Γ, Δ kümesindeki her formülü gerektirsin.*

$$\Delta \text{ gerektirir } F \text{ ise, o zaman } \Gamma \text{ gerektirir } F.$$

Kanıt. Gerektirme tanımından gelir. □

Sayfa 27'deki Değiştirim Teoremi gibi bir teoremimiz vardır.

Teorem 16 (Değiştirim)**.** *Γ formüller kümesi G formülünü gerektirsin, P bir önerme değişkeni olsun, ve H bir önerme formülü olsun. Eğer Γ kümesinin her elemanında P değişkeninin geçtiği her yere H konulursa, Γ' formüller kümesi elde edilsin; benzer şekilde G formülünden G' formülü elde edilsin. O zaman*

$$\Gamma' \text{ gerektirir } G'.$$

Kanıt. **Alıştırma 14.** □

Bu teorem dolayısıyla

$$\begin{aligned} P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P \vDash \neg Q \lor R, &\qquad \text{[Ayırma (Teorem 11)]} \\ Q \vDash \neg\neg Q, &\qquad \text{[Çifte Değilleme (Teorem 5)]} \\ \neg Q \lor R,\ \neg\neg Q \vDash R. &\qquad \text{[Ayırma]} \end{aligned}$$

O zaman Teorem 14'ten dolayı

$$P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P,\ Q \vDash \neg Q \lor R,$$

$$P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P,\ Q \models \neg\neg Q,$$

ve Teorem 15'ten dolayı

$$P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P,\ Q \models R.$$

Bu gerektirmeyi, doğruluk tabloları kullanmadan ispatladık. Gerektirmeyi kanıtlamak için, sadece

$$P \lor \neg Q \lor R, \qquad \neg P, \qquad \neg Q \lor R, \qquad Q, \qquad \neg\neg Q, \qquad R \tag{5.1}$$

formülleri yazdık. Bu formüller listesi, *biçimsel bir kanıttır.* Böyle kanıtlar sonraki bölümün konusudur.

6 Biçimsel kanıt

Eğer $\Gamma = \{\neg(S \wedge T),\ (R \wedge Q) \vee (T \wedge Q),\ P \vee (S \wedge \neg T), \neg T \vee (Q \wedge (S \vee R)),\ \neg R \vee T\}$, o zaman

$$\Gamma \text{ gerektirir } P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T; \tag{6.1}$$

ama bunu doğruluk tablosu yöntemiyle göstermek sıkıcı olurdu. *Biçimsel kanıt* yöntemi, bu durumda hem daha kısa, hem daha ilginçtir.

Biçimsel kanıt, sadece bir formüller listesidir. Şimdi

$$F_1, \ldots, F_n,$$

böyle bir liste olsun. Bu biçimsel kanıtın **sonucu,** F_n formülüdür. Şimdi $1 \leqslant k \leqslant n$ varsayılsın. Eğer $\{F_1, \ldots, F_{k-1}\}$ kümesi F_k formülünü *gerektirmezse,* o zaman F_k, biçimsel kanıtın **hipotezlerinden** biridir. Eğer $k = 1$ ise, o zaman $\{F_1, \ldots, F_{k-1}\}$ kümesi boştur: böylece F_1 ya totoloji, ya hipotezdir. Genelde, tanımımıza göre, biçimsel kanıtın sonucu bir hipotez de olabilir.

Tekrar sayfa 36'daki (5.1) listesine bakalım. Bu biçimsel kanıtın hipotezleri, $P \vee \neg Q \vee R$, $\neg P$, ve Q formülleridir. $\neg Q \vee R$, hipotez değildir, çünkü onu önceki formüller gerektirir; aynı nedenle, R de hipotez değildir.

Teorem 17. *Γ bir önerme formülleri kümesi olsun. Eğer $F_1, \ldots, F_n$ biçimsel kanıtın hipotezleri Γ kümesinden geliyorsa, o zaman*

$$\Gamma \textit{ gerektirir } F_n.$$

Kanıt. Teorem 14 dolayısıyla

$$\Gamma \text{ gerektirir } F_1,$$

$$\Gamma \cup \{F_1\} \text{ gerektirir } F_2,$$
$$\Gamma \cup \{F_1, F_2\} \text{ gerektirir } F_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Gamma \cup \{F_1, \ldots, F_{n-1}\} \text{ gerektirir } F_n.$$

O zaman Teorem 15'in yardımıyla

$$\Gamma \text{ gerektirir } F_2,$$
$$\Gamma \text{ gerektirir } F_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Gamma \text{ gerektirir } F_n. \qquad \square$$

Teoremdeki biçimsel kanıt

- Γ kümesinden F_n formülünü **kanıtlar;**
- F_n **formülünün** Γ **kümesinden** gelen biçimsel bir kanıtıdır.

Son teoremin tersine göre Γ bir F formülünü gerektirirse, o zaman F formülünün Γ kümesinden gelen biçimsel kanıtı vardır. Teoremin tersi doğru mudur?

1. Γ *sonlu* ise, ters kolayca çıkar. Aslında $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_{n-1}\}$ ve $\Gamma \models F$ ise, o zaman $F_1, \ldots, F_{n-1}, F$ listesi, F formülünün Γ kümesinden gelen biçimsel kanıtıdır.

2. Γ kümesinin *sonsuz* olduğu durum için Bölüm 8'e bakın.

Sonlu durumda, Γ kümesinin F formülünü gerektirdiğini bir kişiye *göstermek* istersek, sadece $F_1, \ldots, F_{n-1}, F$ listesini yazmak yeterli olmayabilir; daha fazla formüller yazmamız gerekebilir.

Örneğin sayfa 33'teki Alıştırma 12'yi yaptıysak, aşağıdaki listenin, R formülünün $P \vee Q \vee R$, $P \to Q$, $Q \to R$ hipotezlerinden bir biçimsel kanıtı olduğunu biliyoruz:

$$P \vee Q \vee R, \qquad P \to Q, \qquad Q \to R, \qquad R.$$

$$P \to Q$$
$$\neg P \vee Q$$
$$\neg P \vee Q \vee R$$
$$Q \to R$$
$$\neg Q \vee R$$
$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$$
$$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)) \vee R$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$$
$$\neg(P \vee Q) \vee R$$
$$P \vee Q \vee R$$
$$(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$
$$(\neg(P \vee Q) \vee P \vee Q) \wedge R$$
$$1 \wedge R$$
$$R$$

Şekil 19: Biçimsel bir kanıt

Ancak o alıştırmayı yapmadıysak, Şekil 19'daki gibi daha fazla adım gerekir. Şekil 20'deki gibi adımların nedenlerini ekleyebiliriz.

Alıştırma 15. Yukarıdaki (6.1) gerektirmesinin, Şekil 21'de biçimsel kanıtı vardır. Her satırın nedenini verin.

Şekil 19 ve 21'deki biçimsel kanıtlarda, hipotez olmayan her satır, bildiğimiz kurallara göre önceki satırlar tarafından gerektirilir. Biçimsel kanıtlarda kullanılabilen kurallar kesinleştirilirse, *biçimsel bir dizge* elde edilir. Bölüm 9'da, üç biçimsel dizgesini inceleyeceğiz. Şimdilik tüm bildiğimiz kuralları kullanıyoruz.

Alıştırma 16. Aşağıdaki totolojiler ve gerektirmeler için biçimsel kanıtlar yazın.

1. $P \to P \to P$ bir totolojidir.

1.	$P \to Q$	Hipotez
2.	$\neg P \vee Q$	1. satırdan
		$P \to Q \sim \neg P \vee Q$ ile
3.	$\neg P \vee Q \vee R$	2. satırdan Eklemeyle
4.	$Q \to R$	Hipotez
5.	$\neg Q \vee R$	4. satırdan
		$P \to Q \sim \neg P \vee Q$ ile
6.	$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$	3. ve 5. satırdan Bağlamayla
7.	$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)) \vee R$	6. satırdan Dağılmayla
8.	$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$	7. satırdan
		$\neg P \wedge (P \vee Q) \sim \neg P \wedge Q$ ile
9.	$\neg(P \vee Q) \vee R$	8. satırdan
		De Morgan Kuralıyla
10.	$P \vee Q \vee R$	Hipotez
11.	$(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$	9. ve 10. satırdan Bağlamayla
12.	$(\neg(P \vee Q) \vee P \vee Q) \wedge R$	11. satırdan Dağılmayla
13.	$1 \wedge R$	12. satırdan Fazlalıkla
14.	R	13. satırdan Fazlalıkla

Şekil 20: Açıklamalı biçimsel kanıt

2. $P \to Q \to P$ bir totolojidir.
3. $P \vee (P \to Q)$ bir totolojidir.
4. $(P \to Q) \vee \neg Q$ bir totolojidir.
5. $P \to Q \wedge R$ gerektirir $P \to Q$.
6. $P \wedge \neg P$ gerektirir Q.
7. $P \wedge (Q \vee R)$ gerektirir $P \leftrightarrow (\neg Q \vee P)$.
8. $P \to Q$ ile $P \to \neg Q$ gerektirir $\neg P$.

$$(R \wedge Q) \vee (T \wedge Q)$$
$$(R \vee T) \wedge Q$$
$$Q$$
$$R \vee T$$
$$\neg R \vee T$$
$$(R \vee T) \wedge (\neg R \vee T)$$
$$(R \wedge \neg R) \vee T$$
$$1 \vee T$$
$$T$$
$$\neg(S \wedge T)$$
$$\neg S \vee \neg T$$
$$\neg\neg T$$
$$\neg S$$
$$P \vee (S \wedge \neg T)$$
$$\neg S \vee \neg\neg T$$
$$\neg(S \wedge \neg T)$$
$$P$$
$$\neg T \vee (Q \wedge (S \vee R))$$
$$Q \wedge (S \vee R)$$
$$S \vee R$$
$$R$$
$$R \wedge \neg S$$
$$R \wedge \neg S \wedge T$$
$$Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T$$
$$P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T$$

Şekil 21: Biçimsel bir kanıt

9. $P \to R$ ile $Q \to R$ gerektirir $P \vee Q \to R$.
10. $P \to R$ ile $Q \to S$ gerektirir $P \vee Q \to R \vee S$.
11. $P \leftrightarrow Q$ ile $P \to R$ gerektirir $Q \to R$.

7 Öklid'in önermeleri

Öklid'in önermelerinin göstermeleri, daha biçimsel olarak yazılabilir. Örneğin 5. önermeye bakalım. Likyalı Proklus'a göre [7, sayfa 159], Öklid'in her önermesinin 6 tane parçası var: (1) bildirme, (2) açıklama, (3) belirtme, (4) düzenleme, (5) gösterme, ve (6) bitirme. Açıklamada hipotezler bulunur; belirtmede sonuçlar bulunur. Çoğunlukla bir önermenin bir sonucu vardır; ama 5. önermenin iki sonucu vardır. Düzenleme ve gösterme, sonuçların hipotezlerinden biçimsel kanıt olarak yazılabilir. Göstermenin hipotezleri, düzenlemeden de gelebilir. O zaman parçalarıyla Öklid'in 5. önermesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

Bildirme:

- Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki açılar birbirine eşittir.
- Eşit doğrular uzatıldığında tabanın altında kalan açılar birbirine eşit olacaklardır.

Açıklama:

- Şekil 22'deki ABΓ üçgeninde AB = AΓ.
- AB, Δ noktasına uzatılmış.
- AΓ, E noktasına uzatılmış.

Belirtme:

1. $\angle$ ABΓ = $\angle$ AΓB.
2. $\angle$ ΓBΔ = $\angle$ BΓE.

Düzenleme:

1. Z noktası, BΔ doğrusundadır.
2. H noktası, ΓE doğrusundadır, ve AH = AZ. [3. önerme]

Gösterme:

1.	$AZ = AH$	[düzenlemedeki 2. satırdan]
2.	$AB = A\Gamma$	[hipotez]
3.	$Z\Gamma = HB$	[1. ve 2. satırdan 4. önermeyle]
4.	$\triangle\ AZ\Gamma = \triangle\ AHB$	[1. ve 2. satırdan 4. önermeyle]
5.	$\angle\ A\Gamma Z = \angle\ ABH$	[1. ve 2. satırdan 4. önermeyle]
6.	$\angle\ AZ\Gamma = \angle\ AHB$	[1. ve 2. satırdan 4. önermeyle]
7.	$BZ = \Gamma H$	[1. ve 2. satırdan genel kavram 3 ile]
8.	$\triangle\ BZ\Gamma = \triangle\ \Gamma HB$	[3., 6., ve 7. satırdan 4. önermeyle]
9.	$\angle\ ZB\Gamma = \angle\ H\Gamma B$	[3., 6., ve 7. satırdan 4. önermeyle]
10.	$\angle\ B\Gamma Z = \angle\ \Gamma BH$	[3., 6., ve 7. satırdan 4. önermeyle]
11.	$\angle\ AB\Gamma = \angle\ A\Gamma B$	[5. ve 10. satırdan ortak kavram 3 ile]

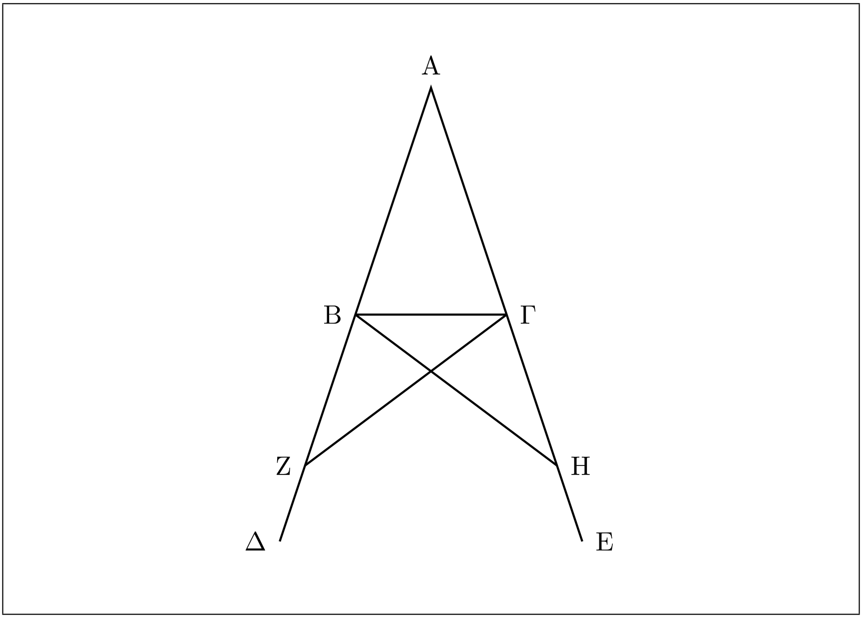
Bitirme:

- Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki açılar birbirine eşittir.
- Eşit doğrular uzatıldığında tabanın altında kalan açılar birbirine eşit olacaklar.

Gösterilmesi gereken tam buydu.

Burada, belirtmedeki 1. sonuç, göstermenin 11. satırıdır, ve 2. sonuç, gösterinin 9. satırıdır, ama $\angle\ ZB\Gamma = \angle\ \Gamma B\Delta$ ve $\angle\ H\Gamma B = \angle\ B\Gamma E$ eşitliklerini tanımamız gerekir. Öklid, gösterinin 4. ve 8. satırını verir, ama kullanmaz.

Alıştırma 17. Biçimsel olarak Öklid'in her önermesini yazın.



Şekil 22: Öklid'in 5. önermesinin şekli

8 Tıkızlık

Sayfa 38'de gösterdiğimiz gibi, her *sonlu* Γ önermeler kümesi için, Γ bir F formülünü gerektiriyorsa, o zaman F formülünün Γ kümesinden gelen bir biçimsel kanıtı vardır. Sonluluk koşulunun kaldırılabildiğini göstereceğiz; bu gerçeğe **tıkızlık** denir.

Şimdi d bir doğruluk göndermesi ve Δ bir formüller kümesi olsun. Δ kümesindeki her G için $d(G) = 1$ ise, o zaman d göndermesine Δ kümesinin bir **modeli** denir.

Teorem 18. Γ *gerektirir* F *ancak ve ancak* $\Gamma \cup \{\neg F\}$ *kümesinin modeli yoktur.*

Kanıt. **Alıştırma 18.** □

Teorem 19 (Tıkızlık)**.** Γ *önerme formülleri kümesi* F *formülünü gerektirirse, o zaman* Γ *kümesinin sonlu bir alt kümesi* F *formülünü gerektirir.*

Kanıt. Karşıt tersini ispatlayacağız. Γ kümesinin her sonlu $\{G_1, \dots, G_n\}$ alt kümesi F formülünü gerektirmesin. O zaman her durumda, Teorem 18'e göre $\{G_1, \dots, G_n, \neg F\}$ kümesinin modeli vardır. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kümesinin bir modelini bulacağız. O zaman Γ, F formülünü gerektirmeyecektir.

Tüm önerme değişkenlerinin, $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ kümesini oluşturduğunu varsayabiliriz. Her n için Γ_n, Γ kümesinde olan ve değişkenleri sadece $\{P_1, \dots, P_n\}$ kümesinden olan formüller kümesi olsun. Γ_n sonsuz olabilir; ama Γ_n kümesindeki formüllerin doğruluk tablolarının kümesi sonludur (neden?). Onun için varsayımımıza göre $\Gamma_n \cup \{\neg F\}$ kümesinin modeli vardır. O kümenin tüm modellerinin kümesi M_n olsun. Eğer $n \leqslant p$ ise, o zaman M_n, M_p kümesini kapsar, yani $M_p \subseteq M_n$. Böylece

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$$

Bir d^* doğruluk göndermesi için, her n için, d^* göndermesinin M_n kümesinin bir elemanı olduğunu (yani $d^* \in \bigcap_n M_n$) göstereceğiz. Aslında d^* doğruluk göndermesinin *özyinelemeli tanımı* olacaktır.

1. Önce $d^*(P_1)$ tanımlanacaktır.

   - Eğer bir n için M_n kümesindeki her d için $d(P_1) = 0$ ise, o zaman $d^*(P_1) = 0$ olsun.
   - Eğer her n için M_n kümesindeki bir d için $d(P_1) = 1$ ise, o zaman $d^*(P_1) = 1$ olsun.

Böylece $d^*(P_1)$ tanımlanmıştır. Her durumda, her n için, M_n kümesinin $d(P_1) = d^*(P_1)$ eşitliğini sağlayan bir d elemanı vardır.

2. Şimdi $d^*(P_2)$ tanımlanacaktır.

   - Eğer bir n için M_n kümesindeki $d(P_1) = d^*(P_1)$ eşitliğini sağlayan her d için $d(P_2) = 0$ ise, o zaman $d^*(P_2) = 0$ olsun.
   - Eğer her n için M_n kümesindeki $d(P_1) = d^*(P_1)$ eşitliğini sağlayan bir d için $d(P_2) = 1$ ise, o zaman $d^*(P_2) = 1$ olsun.

Böylece $d^*(P_1)$ tanımlanmıştır. Her durumda, her n için, M_n kümesinin $d(P_1) = d^*(P_1)$ ve $d(P_2) = d^*(P_2)$ eşitliklerini sağlayan d elemanı vardır.

k. Aynı şekilde devam ediyoruz. Bir k için, $d^*(P_1), \ldots, d^*(P_k)$ değerlerini seçtiğimizi varsayıyoruz, ve her n için, M_n kümesinin

$$d(P_1) = d^*(P_1), \quad d(P_2) = d^*(P_2), \quad \ldots, \quad d(P_k) = d^*(P_k) \qquad (8.1)$$

eşitliklerini sağlayan d elemanının olduğunu varsayıyoruz.

- Eğer bir n için M_n kümesindeki (8.1) eşitliklerini sağlayan her d için $d(P_{k+1}) = 0$ ise, o zaman $d^*(P_{k+1}) = 0$ olsun.

- Eğer her n için M_n kümesindeki (8.1) eşitliklerini sağlayan bir d için $d(P_{k+1}) = 1$ ise, o zaman $d^*(P_{k+1}) = 1$ olsun.

Böylece $d^*(P_{k+1})$ tanımlanmıştır. Her durumda, her n için, M_n kümesinin (8.1) eşitliklerini sağlayan bir d elemanı vardır.

Böylece özyinelemeyle d^* doğruluk göndermesi tanımlanmıştır. Her n için d^*, $\Gamma_n \cup \{\neg F\}$ kümesinin bir modelidir; o zaman d^*, $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kümesinin modelidir. Bu şekilde Γ, F formülünü gerektirmez. $\square$

9 Biçimsel dizgeler

Sayfa 37'deki tanıma göre biçimsel bir kanıtta, her satır

1) ya bir totoloji,
2) ya önceki satırların gerektirdiği bir formül,
3) ya da bir hipotezdir.

Bir formül totolojiyse, bunu doğruluk tablosuyla gösterebiliriz. Bir formül başka formüller tarafından gerektiriliyorsa, bunu da doğruluk tablolarıyla gösterebiliriz. Ancak, doğruluk tablolarını kullanmadan, biçimsel bir kanıtın hipotezlerini ve hipotez olmayan satırlarını ayırt edebilmek isteriz. Bunu yapmak için biçimsel bir yönteme, *biçimsel dizge* denir. Kesinlik için, **biçimsel dizge,**

1) bazı bilinen totolojilerden ve
2) bazı bilinen gerektirmelerden

oluşur. Bu bilinen totolojilere dizgenin **aksiyomları** denir; bu bilinen gerektirmelere dizgenin **çıkarım kuralları** denir.

D biçimsel bir dizge, Γ bir formüller kümesi, ve K biçimsel bir kanıt olsun. Eğer K kanıtın her satırı,

1) ya D dizgesinin bir aksiyomu,
2) ya D dizgesinin bir çıkarım kuralına göre önceki satırların gerektirdiği bir formül,
3) ya da Γ kümesinin bir elemanı ise,

o zaman Γ, K kanıtın sonucunu gerektirir, ve ayrıca, bu gerektirme, D dizgesinin **(biçimsel) bir teoremdir.** Her gerektirme D dizgesinin bir teoremi ise, bu dizgeye **tam** denir. İki biçimsel dizgeyi tanımlayıp tamlığını kanıtlayacağız.

9.1 $\mathscr{D}_0$ biçimsel dizgesi

Aslında bir formülü sonlu sayıda formüllerin gerektirip gerektirmediğini öğrenmek için, doğruluk tablosu yönteminin kendisi biçimsel bir yöntemdir. O zaman en kapsamlı biçimsel dizgede

1) her totoloji bir aksiyomdur,
2) sonlu sayıda formüllerden gelen her gerektirme bir çıkarım kuralıdır.

Bu dizge $\mathscr{D}_0$ olsun. O zaman Tıkızlık Teoremine göre $\mathscr{D}_0$ tamdır.

9.2 $\mathscr{D}_1$ biçimsel dizgesi

Şimdi $\mathscr{D}_1$ adlı biçimsel dizgesini tanımlayacağız. Dizgenin aksiyomları iki şekilde:

- 1 formülü,
- her $\neg F \vee F$ formülü.

Çıkarım kuralları üç şekilde:

Ekleme: Tüm F ve G formülleri için, F formülünden $G \vee F$ çıkar.

Bağlama: F ile G formüllerinden $F \wedge G$ çıkar.

Yerine Koyma: $F \sim G$, sayfa 25'teki Teorem 5'ten bir denklik olsun. Bu denklikten, sayfa 27'deki Değiştirim Teoremine göre, $F' \sim G'$ denkliği sağlansın. Bir K formülünün F' alt formülü olsun. Bu alt formülün yerine G' konularak K^* formülü (sayfa 28'deki Yerine Koyma Teoremindeki gibi) elde ediliyorsa, o zaman K formününden K^* çıkar.

$\mathscr{D}_1$ dizgesinin tam olduğunu göstereceğiz. Bunu yapmak için, ilk olarak, her formülün *tikel-evetlemeli normal biçimi* olduğunu gözlemleyeceğiz.

Tikel-evetlemeli normal biçim, örneklerden en iyi anlaşılır. $P \vee Q \to R$ ve $(P \to R) \wedge (Q \to R)$ formüllerinin doğruluk tabloları, birbiriyle aynıdır,

P	0	1	0	1	0	1	0	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	0	0	0	1	1	1	1
$P \lor Q \to R$	1	0	0	0	1	1	1	1
$\neg P \land \neg Q \land \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \land \neg Q \land R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \land \neg Q \land R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$\neg P \land Q \land R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \land Q \land R$	0	0	0	0	0	0	0	1

Şekil 23: $P \lor Q \to R$ formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi için doğruluk tabloları

ve bu ortak tablo, sayfa 25'teki Şekil 15'tedir. Dolayısıyla bu formüllerin tikel-evetlemeli normal biçimleri birbiriyle aynıdır ve aşağıdaki gibi yazılır:

$$(\neg P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land R) \\ \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R).$$

Bu önermeyi anlamak için, Şekil 23'ü düşünün.

Şimdi F rastgele önerme formülü olsun, ve onun önerme değişkenleri P_1, …, P_n olsun. Üstelik d bir doğruluk göndermesi olsun. O zaman

$$(d(P_1), \dots, d(P_n))$$

listesi için, 2^n tane seçenek var. Bir m için, m ve sadece m tane seçenek için, $d(F) = 1$. O seçenekler,

$$(e_1^1, \dots, e_n^1), \qquad \dots, \qquad (e_1^m, \dots, e_n^m)$$

olsun. Örneğin $P_1 \lor P_2 \to P_3$ için seçenekler $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ listeleridir; bunlar Şekil 23'ten okunabilir. Genelde

$$1 \leqslant j \leqslant n, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

ise, bir P^i_j formülünün aşağıdaki tanımı olsun.

- $e^i_j = 0$ ise P^i_j, $\neg P_j$ formülüdür.
- $e^i_j = 1$ ise P^i_j, P_j formülüdür.

Ondan sonra F^i formülü

$$P^i_1 \wedge \cdots \wedge P^i_n$$

formülü olsun. Böyle bir formüle **tümel-evetleme** denir. Şimdi

$$F^1 \vee \cdots \vee F^m$$

formülü tanımlanmıştır. Böyle bir formüle **tikel-evetleme** denir. Aslında $F^1 \vee \cdots \vee F^m$ formülü, F formülünün **tikel-evetlemeli normal biçimidir.** Yani, F formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi,

$$(P^1_1 \wedge \cdots \wedge P^1_n) \vee \cdots \vee (P^m_1 \wedge \cdots \wedge P^m_n)$$

formülüdür. Bu formülün F formülüne denk olduğu görünebilir. İki özel durum vardır:

$\boldsymbol{m = 0}$ ise F formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi 0 formülüdür.

$\boldsymbol{n = 0}$ ise, ya F denktir 0 ya da F denktir 1. Sırasıyla F formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi, ya 0 ya da 1'dir.

Şimdi aşağıdaki alıştırma kolaylıkla çözülebilir.

Alıştırma 19. Rastgele bir doğruluk tablosu için, doğruluk tablosu o olan bir formülü yazın.

Teorem 20. *Bir $\{F_1, \dots, F_n\}$ formüller kümesi bir G formülünü gerektirir ancak ve ancak $G \vee (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n)$ formülü G formülüne denktir.*

Kanıt. **Alıştırma 20.** □

Teorem 21. *$\mathscr{D}_1$ biçimsel dizgesi tamdır.*

Kanıt. Sadece Yerine Koyma kuralını kullanarak her F formülünü tikel-evetlemeli normal F' biçimine getirebiliriz. Tüm adımlarımız, tersine çevrilebilir. Bu şekilde

- F' formülünün F formülünü gerektirdiği ve
- F formülünün F' formülünü gerektirdiği,

$\mathscr{D}_1$ dizgesinin bir teoremidir. Ayrıca F bir totolojiyse, tekrar sadece Yerine Koyma kuralını kullanarak F formülünün normal F' biçiminin 1'e denk olduğunu gösterebiliriz, ve adımlarımız tersine çevrilebilir. Bu şekilde her totolojinin bir totoloji olduğu, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin bir teoremidir.

Şimdi Γ kümesi, F formülünü gerektirsin. Tıkızlık Teoremine göre Γ kümesinin sonlu bir $\{G_1, \ldots, G_n\}$ altkümesi de F formülünü gerektirir. Bağlama ve Ekleme kuralları sayesinde, bu $\{G_1, \ldots, G_n\}$ kümesinin

$$F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$$

formülünü gerektirdiği, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin bir teoremdir. Önceki teoreme göre, F ve $F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$ formülleri, birbirine denktir; dolayısıyla, bu formüllerin aynı tikel-evetlemeli normal F' biçimi vardır. Gösterdiğimiz gibi $F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$ formülünün F' formülünü gerektirdiği, ve F' formülünün F formülünü gerektirdiği, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin teoremidir. O zaman Γ kümesinin F formülünü gerektirdiği, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin teoremidir. □

9.3 $\mathscr{D}_2$ biçimsel dizgesi

Bu aşamada yeni simgeler yararlı olacak. Sayfa 30'daki gibi, eğer Γ formüller kümesi F formülünü gerektirirse,

$$\Gamma \vDash F$$

ifadesini yazacağız. Bu $\vDash$ simgesine **turnike** denir. Tıkızlık Teoremine göre $\Gamma \vDash F$ ise, o zaman Γ kümesinin sonlu bir Γ_0 altkümesi için $\Gamma_0 \vDash F$ olur. Eğer bir $\Gamma \vDash F$ gerektirmesi, $\mathscr{D}$ biçimsel dizgesinin bir teoremiyse,

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{D}} F$$

ifadesini yazacağız. Bu $\vdash$ simgesi de, bir turnikedir. İstersek

- $\vDash$ simgesine **yorumsal** turnike,
- $\vdash$ simgesine **dizimsel** turnike

diyebiliriz. Ancak adlar önemli değil. Sayfa 37'deki Teorem 17'ye göre

$$\text{her } \Gamma \text{ ve } F \text{ için, } \Gamma \vdash_{\mathscr{D}} F \text{ ise } \Gamma \vDash F.$$

Ayrıca $\mathscr{D}$ dizgesi tamdır ancak ve ancak

$$\text{her } \Gamma \text{ ve } F \text{ için, } \Gamma \vDash F \text{ ise } \Gamma \vdash_{\mathscr{D}} F.$$

Tam biçimsel bir dizge, $\mathscr{D}_1$ dizgesinden daha basit olabilir. İlk olarak, bir formülün tikel-evetlemeli normal biçimi, sadece $\vee$, $\wedge$, $\neg$, 0, ve 1 bağlayıcılarını kullanır. Ayrıca

$$0 \sim \neg 1, \qquad 1 \sim \neg P_1 \vee P_1, \qquad F \wedge G \sim \neg(\neg F \wedge \neg G).$$

Öyleyse her formül, sadece $\vee$ ile $\neg$ bağlayıcılarının kullanıldığı bir formüle denktir. $\mathscr{D}_2$ adlı biçimsel dizge,* sadece bu bağlayıcıları kullanacak. Şimdi $\Gamma \vdash_{\mathscr{D}_2} F$ ifadesinin yerine

$$\Gamma \vdash_2 F$$

ifadesini yazalım. $\mathscr{D}_2$ dizgesinin her aksiyomu $\neg F \vee F$ biçimindedir:

$$\vdash_2 \neg F \vee F.$$

$\mathscr{D}_2$ dizgesinin çıkarım kuralları, aşağıdaki şekillerdedir.

Ekleme: Tüm F ve G formülleri için, F formülünden $G \vee F$ çıkar:

$$F \vdash_2 G \vee F.$$

Daralma: $F \vee F$ formülünden F çıkar:

$$F \vee F \vdash_2 F.$$

*Bu dizgeyi Shoenfield'den [8] aldım, ama ilk kaynağı Russell ile Whitehead'dir [11].

Birleşme: $F \vee (G \vee H)$ formülünden $(F \vee G) \vee H$ çıkar:

$$F \vee (G \vee H) \vdash_2 (F \vee G) \vee H.$$

Kesme: $F \vee G$ ve $\neg F \vee H$ formüllerinden $G \vee H$ çıkar:

$$F \vee G,\ \neg F \vee H \vdash_2 G \vee H.$$

Teorem 22 (Değişme)**.** $\Gamma \vdash_2 F \vee G$ *ise* $\Gamma \vdash_2 G \vee F$.

Kanıt. Eğer $\Gamma \vdash_2 F \vee G$ ise, o zaman $\vdash_2 \neg F \vee F$ sayesinde Kesme kuralıyla $\Gamma \vdash_2 G \vee F$. □

$F \vee G \vee H$ demek $F \vee (G \vee H)$ olduğunu hatırlayın, onun için

$$F_1 \vee \cdots \vee F_n \text{ demek } F_1 \vee (F_2 \vee \cdots (F_{n-1} \vee F_n) \cdots).$$

Teorem 23 (Genelleştirilmiş Ekleme, Daralma & Değişme)**.** *Bir n için $F_1, \ldots, F_n$, formüller olsun. Bir m için, her i için, $1 \leqslant i \leqslant m$ ise $1 \leqslant k_i \leqslant n$ koşulunu sağlayan k_i seçilsin. O zaman*

$$\Gamma \vdash_2 F_{k_1} \vee \cdots \vee F_{k_m} \text{ ise } \Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n.$$

Kanıt. Kanıtımız, m üzerine tümevarım yöntemini kullanacaktır. Aslında üç durum vardır.

- ***m* = 1 durumu.** $1 \leqslant k \leqslant m$ ve $\Gamma \vdash_2 F_k$ varsayıyoruz. O zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 (F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n) \vee F_k, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_k \vee F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_{k-1} \vee F_k \vee F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Ekleme]}\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_k \vee F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Ekleme]}
\end{aligned}$$

yani $\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n$.

- **$m = 2$ durumu.** $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ ve

$$\Gamma \vdash_2 F_i \lor F_j$$

varsayıyoruz. Eğer $i = j$ ise, o zaman Daralmayla $\Gamma \vdash_2 F_i$, ve $m = 1$ durumundan $\Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_n$. Eğer $j < i$ ise, o zaman Değişmeyle $\Gamma \vdash_2 F_j \lor F_i$. Dolayısıyla $i < j$ varsayılabilir. O halde $n \geqslant 2$. Şimdi n üzerine tümevarımı kullanacağız.

1. Eğer $n = 2$ ise, ispatlanacak hiçbir şey yoktur.
2. Şimdi $k \geqslant 2$ olsun, ve $n = k$ durumunda (ve $m = 2$ durumunda) teoremin ispatlandığını varsayalım. O zaman $n = k + 1$ durumunda ispatlayacağız.
   - Eğer $i = 1$ ve $j = 2$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1 \lor F_2, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1) \lor F_2, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_2 \lor (F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 (F_2 \lor F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_{k+1}. && \text{[Değişme]}
\end{aligned}$$

   - Eğer $i = 1$ ve $j > 2$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 F_1 \lor F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}, && [n = k \text{ durumu}]\\
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_2 \lor (F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1) \lor F_2, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \lor \cdots \lor F_{k+1}) \lor F_1 \lor F_2, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_{k+1}. && \text{[Değişme]}
\end{aligned}$$

   - Eğer $i > 1$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 F_2 \lor \cdots \lor F_{k+1}, && [n = k \text{ durumu}]\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \lor \cdots \lor F_{k+1}. && \text{[Ekleme]}
\end{aligned}$$

Böylece, tümevarım ile, $m = 2$ durumunda teorem ispatlanmıştır.

• $\boldsymbol{m > 2}$ **durumu.** $\ell \geqslant 2$ olsun, ve $m = \ell$ durumunda teoremin ispatlandığını varsayalım. $m = \ell + 1$ durumunda ispatlayacağız. O zaman

$$\Gamma \vdash_2 F_{k_1} \vee \cdots \vee F_{k_{\ell+1}}$$

varsayıyoruz. Bu durumda,

$$\begin{array}{ll}
\Gamma \vdash_2 (F_{k_1} \vee F_{k_2}) \vee \cdots \vee F_{k_{\ell+1}}, & [\text{Birleşme}] \\
\Gamma \vdash_2 (F_{k_1} \vee F_{k_2}) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, & [m = \ell \text{ durumu}] \\
\Gamma \vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1} \vee F_{k_2}, & [\text{Değişme}] \\
\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}) \vee F_{k_2}, & [\text{Birleşme}] \\
\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, & [m = 2 \text{ durumu}] \\
\Gamma \vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}, & [\text{Değişme}] \\
\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}, & [\text{Birleşme}] \\
\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n) & \\
\qquad\qquad \vee (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, & [m = 2 \text{ durumu}] \\
\Gamma \vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, & [\text{Daralma}] \\
\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. & [\text{Daralma}]
\end{array}$$

Tümevarımdan tüm durumda teorem kanıtlanmıştır. □

Eğer P herhangi bir önerme değişkeni ise, o zaman hem P hem $\neg P$ formülüne **harfi** denir.

Teorem 24. *n, bir sayı olsun, ve her k için, $1 \leqslant k \leqslant n$ ise, F_k bir harfi olsun. Eğer*

$$\vDash F_1 \vee \cdots \vee F_n$$

ise, o zaman $1 \leqslant i \leqslant n$ ile $1 \leqslant j \leqslant n$ koşullarını sağlayan bir i ve j için F_i formülü $\neg F_j$ formülüyle aynıdır.

Kanıt. **Alıştırma 21.** □

Teorem 25. *Her n için, $n \geqslant 2$ ve $\vDash F_1 \vee \cdots \vee F_n$ ise, o zaman*

$$\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n.$$

Kanıt. $n \geqslant 2$ ve $\vDash F_1 \vee \cdots \vee F_n$ varsayılıyor. En basit durumda, her F_k bir harfidir. Bu durumda, Teorem 24'e göre, bir i ve j için, F_i ve $\neg F_j$ birbiriyle aynıdır. O zaman

$$\begin{aligned} &\vdash_2 F_i \vee F_j, && \text{[aksiyom]} \\ &\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. && \text{[Teorem 23]} \end{aligned}$$

Şimdi, bir k için, F_k formülü harfi olmasın. Teorem 23 sayesinde, $k = 1$ varsayabiliriz. Üç tane durum var. Her bir durumda, daha basit durumların ispatlandığını varsayabiliriz.

F_1 bir $\neg\neg G$ formülüyse, o zaman $\vDash G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\vdash_2 G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, && \text{[daha basit durum]} \\ &\vdash_2 F_1 \vee \neg G, && \text{[aksiyom]} \\ &\vdash_2 \neg G \vee F_1, && \text{[Değişme]} \\ &\vdash_2 (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1, && \text{[Kesme]} \\ &\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. && \text{[Değişme]} \end{aligned}$$

F_1 bir $\neg(G \vee H)$ formülüyse, o zaman $\vDash \neg G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$ ve $\vDash \neg H \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\vdash_2 \neg G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, && \text{[daha basit durum]} \\ &\vdash_2 F_1 \vee G \vee H, && \text{[aksiyom]} \\ &\vdash_2 G \vee H \vee F_1, && \text{[Teorem 23]} \\ &\vdash_2 (H \vee F_1) \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Kesme]} \\ &\vdash_2 (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee H \vee F_1, && \text{[Değişme]} \\ &\vdash_2 H \vee (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1, && \text{[Teorem 23]} \\ &\vdash_2 \neg H \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, && \text{[daha basit durum]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdash_2 ((F_2 \lor \dots \lor F_n) \lor F_1) \lor F_2 \lor \dots \lor F_n, && \text{[Kesme]}\\
&\vdash_2 (F_2 \lor \dots \lor F_n) \lor (F_2 \lor \dots \lor F_n) \lor F_1, && \text{[Değişme]}\\
&\vdash_2 F_1 \lor \dots \lor F_n. && \text{[Teorem 23]}
\end{aligned}$$

F_1 bir $G \lor H$ formülüyse, o zaman $\vDash G \lor H \lor F_2 \lor \dots \lor F_n$, dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\vdash_2 G \lor H \lor F_2 \lor \dots \lor F_n, && \text{[daha basit durum]}\\
&\vdash_2 F_2 \lor \dots \lor F_n \lor F_1, && \text{[Teorem 23]}\\
&\vdash_2 F_1 \lor \dots \lor F_n. && \text{[Teorem 23]}
\end{aligned}$$ □

Teorem 26 (Totoloji)**.** *$\vDash F$ ise $\vdash_2 F$.*

Kanıt. $\vDash F$ ise, o zaman

$$\vDash F \lor F,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\vdash_2 F \lor F, && \text{[Teorem 25]}\\
&\vdash_2 F. && \text{[Daralma]}
\end{aligned}$$ □

Teorem 27 (Ayırma)**.** *$\Gamma \vdash_2 F$ ile $\Gamma \vdash_2 \neg F \lor G$ ise $\Gamma \vdash_2 G$.*

Kanıt. $\Gamma \vdash_2 F$ ile $\Gamma \vdash_2 \neg F \lor G$ varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 G \lor F, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F \lor G, && \text{[Değişme]}\\
&\Gamma \vdash_2 G \lor G, && \text{[Kesme]}\\
&\Gamma \vdash_2 G. && \text{[Daralma]}
\end{aligned}$$ □

Teorem 28 ($\mathscr{D}_2$ dizgesinin tamlığı)**.** *$\Gamma \vDash F$ ise $\Gamma \vdash_2 F$.*

Kanıt. $\Gamma \vDash F$ varsayalım. Tıkızlık Teoremi sayesinde Γ kümesinin bir $\{G_1 \dots, G_n\}$ alt kümesi için $\{G_1 \dots, G_n\} \vDash F$. O zaman

$$\vDash \neg G_1 \lor \dots \lor \neg G_n \lor F,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\vdash_2 \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \text{[Totoloji Teoremi]}\\
\Gamma &\vdash_2 \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F,\\
\Gamma &\vdash_2 G_1,\\
\Gamma &\vdash_2 \neg G_2 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \text{[Ayırma]}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\Gamma &\vdash_2 F.
\end{aligned}$$

□

Kaynakça

[1] Stanley N. Burris. *Logic for Mathematics and Computer Science.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1998.

[2] Alonzo Church. *Introduction to mathematical logic. Vol. I.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[3] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü.* Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[4] Teo Grünberg ve Adnan Onart. *Mantık Terimleri Sözlüğü.* Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[5] Ali Nesin. *Önermeler Mantığı.* Bilgi Üniversitesi Yayınları, Ekim 2001.

[6] Öklid. *Öğelerin 13 Kitabından Birinci Kitap.* Matematik Bölümü, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul, 4. basım, Eylül 2014. Öklid'in Yunanca metni ve Özer Öztürk & David Pierce'in çevirdiği Türkçesi.

[7] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's* Elements. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow. Reprint of the 1970 edition. With a foreword by Ian Mueller.

[8] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical logic.* Association for Symbolic Logic, Urbana, IL, 2001. reprint of the 1973 second printing.

[9] Dirk J. Struik. *A Concise History of Modern Mathematics.* Dover, New York, fourth revised edition, 1987.

[10] Dirk J. Struik. *Kısa Matematik Tarihi*. Sarmal Yayınevi, İstanbul, 1996. Türkçesi: Yıldız Silier.

[11] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia Mathematica*, volume I. University Press, Cambridge, 1910.

Dizin