

Öklid Geometrisine Giriş

Final Sınavı Çözümleri

Kıvanç Ersoy

David Pierce

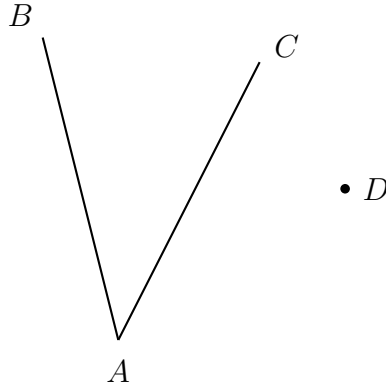
Gülay Telsiz

İpek Tuvay

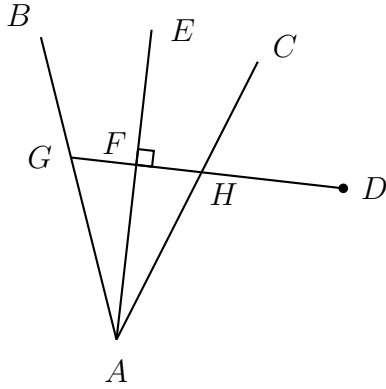
5 Ocak 2017

Buradaki dört problemden sadece üç tanesini çözün.

Problem 1. AB ve AC doğrularının kesişimi ile oluşan bir BAC açısı ve bir D noktası verilmiş olsun. D noktasından geçen ve (A 'nın tarafında) AB , AC doğrularından eşit parçalar ayıran bir doğru çizilebileceğini gösteriniz. *İpucu:* BAC açısını ikiye bölen doğruyu çizerek başlayabilirsiniz.

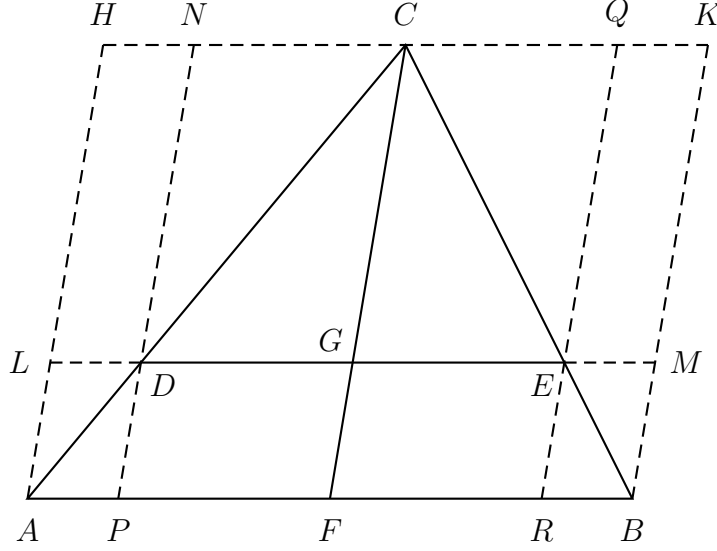


Çözüm.



1. BAC açısı AE doğrusu ile ikiye bölünsün [9].
2. AE 'ye dik olan DF indirilsin [12].
3. Bu DF doğrusu, AB 'yi G 'de ve AC 'yi H 'de kessin.
4. AFG ve AFH açıları dik olduğundan eşittir.
5. FAG ve HAG açıları da eşit olduğundan, ve AF ortak olduğundan, AFG ve AFH üçgenlerinde $AG = AH$ [26].

Problem 2. Bir ABC üçgeninin AB tabanına paralel olan ve diğer kenarları kesen bir doğru DE olsun, ve AB 'nin orta noktası F olsun. CF 'nin ve DE 'nin kesişim noktası G olsun. G 'nin DE 'nin orta noktası olduğunu kanıtlayın. Önerme 36'nın tersi kabul edilebilir. *İpucu:* $AH \parallel FC \parallel BK$ ve $HK \parallel AB$ olsun; DE , L ve M 'ye uzatılsın; ve sırasıyla D ve E 'den geçen, CF 'ye paralel olan NP ve QR çizilsin. NF ve FQ paralelkenarlarının eşit olduğunu gösterin.



Çözüm. [Eğer bir XY doğrusu bir paralelkenarın çizilmemiş köşegeniyse, o zaman XY bu paralelkenarın adıdır.]

1. $HF = FK$ ve $LF = FM$ [36]
2. $HG = GK$ [O.K. 3]
3. $HD = DF$ ve $FE = EK$ [43]
4. $HG = NF$ ve $FQ = GK$ [O.K. 2]
5. $NF = FQ$ [O.K. 1]
6. $PF = FR$ [36'nın tersi]
7. $PF = DG$ ve $FR = GE$ [34]
8. $DG = GE$ [O.K. 1]

Problem 3. (a) Aşağıdaki formüllerin ikisinin her biri, diğerinin değillesine denktir. Hangi formül, hangi formülün değillesine denktir?

$$\neg Q \wedge (R \rightarrow \neg P), \quad \neg P \vee \neg R \rightarrow Q, \quad P \vee Q \rightarrow \neg(P \wedge Q).$$

(b) Biçimsel kanıt ile

$$R \leftrightarrow P \vee S, R \rightarrow Q \models P \rightarrow Q$$

gerektirmesini gösterin.

Çözüm. (a) Verilen formüllerin doğruluk tabloları

\neg	Q	\wedge	$(R$	\rightarrow	\neg	$P)$	\parallel	\neg	$(P$	\wedge	$R)$	\rightarrow	$Q)$	\parallel	P	\vee	Q	\rightarrow	\neg	$(P$	\wedge	$Q)$
1	0	1	0	1	1	0	\parallel	1	0	0	0	0	0	\parallel	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	\parallel	1	1	0	0	0	0	\parallel	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	\parallel	1	0	0	0	1	1	\parallel	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	\parallel	1	1	0	0	1	1	\parallel	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	\parallel	1	0	0	1	0	0	\parallel	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	\parallel	0	1	1	1	1	0	\parallel	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	\parallel	1	0	0	1	1	1	\parallel	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	\parallel	0	1	1	1	1	1	\parallel	1	1	1	0	0	1	1	1

olduğundan

$$\neg Q \wedge (R \rightarrow \neg P) \sim \neg(\neg P \vee \neg R \rightarrow Q).$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \neg(\neg P \vee \neg R \rightarrow Q) &\sim \neg(\neg(\neg P \vee \neg R) \vee Q) \\ &\sim (\neg P \vee \neg R) \wedge \neg Q \sim (R \rightarrow \neg P) \wedge \neg Q \sim \neg Q \wedge (R \rightarrow \neg P). \end{aligned}$$

- (b) 1. $R \leftrightarrow P \vee S$ hipotez
2. $P \vee S \rightarrow R$ [basitleştirme]
3. $\neg(P \vee S) \vee R$
4. $(\neg P \wedge \neg S) \vee R$
5. $(\neg P \vee R) \wedge (\neg S \vee R)$
6. $\neg P \vee R$ basitleştirme
7. $P \rightarrow R$
8. $R \rightarrow Q$ hipotez
9. $P \rightarrow Q$ hipotetik tasım

- Problem 4.** (a) Aşağıdaki verilen doğruluk tablosunu doldurun.
 (b) En sevdiğiniz yöntemi kullanarak $Q \rightarrow R$ formülünün $\neg P \rightarrow Q \rightarrow R \wedge 1$ formülünü gerektirdiğini gösterin.
 (c) Zaten yapmadıysanız, $Q \rightarrow R \models \neg P \rightarrow Q \rightarrow R \wedge 1$ gerektirmesini biçimsel kanıt ile gösterin.

\neg	P	\rightarrow	Q	\rightarrow	R	\wedge	1
0	0		0		0		
1	0		0		0		
0	1		0		0		
1	1		0		0		
0	0		1		1		
1	0		1		1		
0	1		1		1		
1	1		1		1		

Çözüm.

(a)

\neg	P	\rightarrow	Q	\rightarrow	R	\wedge	1
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1

(b)

Q	\rightarrow	R
0	1	0
0	1	0
1	0	0
1	0	0
0	1	1
0	1	1
1	1	1
1	1	1

($Q \rightarrow R$ formülünün doğru olduğu her satırda $\neg P \rightarrow Q \rightarrow R \wedge 1$ de doğrudur)

- (c) $Q \rightarrow R$
 $Q \rightarrow R \wedge 1$
 $P \vee (Q \rightarrow R \wedge 1)$
 $\neg P \rightarrow Q \rightarrow R \wedge 1$