Önermeler Mantığı

David Pierce

26 Aralık 2018

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/
dpierce@msgsu.edu.tr

Bu yazı, bölümümün Öklid Geometrisine Giriş dersi için hazırlanmıştır. Yazının ana kaynakları, Church'un [2], Shoenfield'in [10], Burris'in [1], ve Nesin'in [6] kitapları ve *Foundations of Mathematical Practice* (Eylül 2010) adlı notlarımdır. Bazı terimler, [4, 5] kaynaklarından alınmıştır.

İçindekiler

Şekil Listesi

Giriş ve Özet

Önerme formülleri, kısaca *formüller,* çok karmaşık olabilir; ama daha basitleri, matematikte ve matematik dışında her zaman kullandığımız cümlelerin biçimlerini gösterir.

Bir formül, bir polinom gibidir. Bir polinomun değişkenlerine sayısal değerler verince polinomun değerini hesaplayabiliriz. Bir önerme formülünün değişkenlerinin değerleri, ya *doğruluk* ya da *yanlışlık*, kısaca 1 veya 0, olabilir. Bir *doğruluk göndermesi* bu değerleri seçer ve formülün değerini verir. Bir formülün değişkenlerinin ve formülün kendisinin tüm olası değerleri, formülün *doğruluk tablosunda* gösterilir.

Eğer iki formülün, her doğruluk göndermesi altında değeri aynı ise, o zaman formüller birbirine **denktir.** Denklik $\sim$ ile ifade edilebilir. Örneğin

$\neg$	$\big(P$	$\land$	$(Q$	$\leftrightarrow$	$0)\big)$
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

P	$\land$	$(Q$	$\lor$	$1)$	$\to$	Q
0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

doğruluk tablolarına göre

$$\neg\big(P \land (Q \leftrightarrow 0)\big) \sim P \land (Q \lor 1) \to Q.$$

Verilen iki formülde

- P ve Q, **önerme değişkenidir;**
- 0, 1, $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$, ve $\leftrightarrow$, **bağlayıcıdır.**

Ayrıca

0) 0 ve 1, **sıfır-konumlu** veya **sabittir;**
1) $\neg$, **bir-konumludur;**
2) $\wedge$, $\vee$, $\to$, ve $\leftrightarrow$, **iki-konumludur.**

Önerme formüllerinin *özyineli* tanımının aşağıdaki dört parçası vardır.

0. Her e sabiti, bir önerme formülüdür.
1. Eğer F, bir önerme formülü ise, o zaman
$$\neg F$$
ifadesi de bir önerme formülüdür.
2. Her $*$ iki-konumlu bağlayıcısı için, eğer F ve G, önerme formülleri ise, o zaman
$$(F * G)$$
ifadesi de bir önerme formülüdür.
3. Her önerme değişkeni, bir önerme formülüdür.

Değişken olmayan her formülün **anabağlayıcısı** vardır:

0) Bir e formülünde e,
1) bir $\neg F$ formülünde $\neg$,
2) bir $(F * G)$ formülünde $*$,

formülün anabağlayıcısıdır. Değişken olmayan her formülün *tek* anabağlayıcısı olduğu, önemli bir teoremdir, ama ilk okunuşta teoremin kanıtı atlanabilir.

Kısaltma için bazı formüllerden ayraçlar silinebilir. Dış ayraçlar her zaman silinebilir; ayrıca

- $\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcıları, $\to$ ve $\leftrightarrow$ bağlayıcılarından daha güçlü sayılır (örneğin $F \wedge G \to H$ demek $(F \wedge G) \to H$ demektir);
- aynı iki-konumlu bağlayıcının iki *geçişinden,* sağdaki daha güçlüdür (örneğin $F \to G \to H$ demek $F \to (G \to H)$ demektir).

Bir formülde her simge

- ya bir değişkendir,
- ya da formülün bir ve tek bir **altformülünün** anabağlayıcısıdır.

Formülün **doğruluk tablosunda,** formülün

- değişkenlerinin değerleri, değişkenlerin altında,
- değişken olmayan altformüllerinin değerleri, altformüllerin anabağlayıcılarının altında,

yazılır.

Bir sabit veya bir değişken olmayan bir formül, **bileşik** bir formüldür. Bileşik formüllerin doğruluk tabloları, Şekil 1'deki kurallar ile hesaplanabilir.

İki formülün denk olduğunu formüllerin doğruluk tablolarını hesaplamadan, sadece basit denklikler kullanarak adım adım gösterebiliriz. Örneğin

$$\begin{aligned} &\neg\big(P \wedge (Q \leftrightarrow 0)\big) \\ \sim\ &\neg\big(P \wedge \neg Q\big) \\ \sim\ &\neg P \vee Q \\ \sim\ &P \to Q \\ \sim\ &P \wedge 1 \to Q \\ \sim\ &P \wedge (Q \vee 1) \to Q. \end{aligned}$$

Bir Γ formüller kümesi ve bir F formülü için eğer Γ'nın her elemanının doğru olduğu zamanda F doğru ise, o zaman Γ, F'yi **gerektirir.** Gerektirme $\vDash$ ile ifade edilebilir. Bir gerektirme

- ya doğruluk tabloları
- ya da *biçimsel kanıt*

önerme		cins	
söz	simge	Türkçe	İngilizce
F ve G	$F \wedge G$	tümel-evetleme	conjunction
F veya G	$F \vee G$	tikel-evetleme	disjunction
F ise G	$F \to G$	koşullu	conditional
F ancak ve ancak G	$F \leftrightarrow G$	karşılıklı-koşullu	biconditional
F değil	$\neg F$	değilleme	negation

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

P	$\neg P$
0	1
1	0

Şekil 1. Bileşik önermeler

ile gösterilebilir. Örneğin

P	$\to$	R	$\neg$	R	$\to$	Q	P	$\vee$	$\neg$	Q
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1

doğruluk tablolarından

$$P \to R,\ \neg R \to Q,\ P \vee \neg Q \vDash R.$$

Ayrıca biçimsel kanıt ile

(1)	$P \to R$,	[hipotez]
(2)	$\neg P \vee R$,	[$\sim$ (1)]
(3)	$\neg R \to Q$,	[hipotez]
(4)	$R \vee Q$,	[$\sim$ (3)]
(5)	$Q \vee R$,	[$\sim$ (4)]
(6)	$(\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R)$,	[(2) & (4)]
(7)	$(\neg P \wedge Q) \vee R$,	[$\sim$ (6)]
(8)	$\neg(P \vee \neg Q) \vee R$,	[$\sim$ (7)]
(9)	$P \vee \neg Q$,	[hipotez]
(10)	R.	[(8) & (9)]

Bu biçimsel kanıtta her satır

- ya bir hipotezdir (veya varsayımdır),

- ya da önce gelen satırlar tarafından gerektirilir.

Bu şekilde eğer Γ sonlu ve $\Gamma \vDash F$ ve Γ ise, o zaman bu gerektirme için biçimsel kanıt vardır. Biçimsel kanıtlarımızın adımlarının kolaylıkla anlaşılmasını isteriz.

Eğer biçimsel kanıtlarda önce gelen satırlardan yeni satırlar elde etmek için kesin *çıkarım kuralları* verirsek, bir *biçimsel dizgeyi* tanımlarız. Bir dizgenin **tam** olmasını isteriz; bu durumda her gerektirme için biçimsel bir kanıt vardır.

Tıkızlık Teoremi sayesinde, eğer $\Gamma \vDash F$ ise, o zaman Γ'nın *sonlu* bir altkümesi F'yi gerektirir.

Tıkızlık ve tamlık, ilk okunuşta atlanabilir.

Kısım I.

Formüller

1. Önermeler

Bir **önerme** (proposition), belli bir *durumda doğru* veya *yanlış* denebilen bir *cümle* veya *tümcedir.*

1. **Cümleler** veya **tümceler** (sentences), günlük dilden bilinir. Çağdaş matematikte bazen bir cümle, simgeler listesi olarak yazılıyor, örneğin

$$\forall x\ \exists y\ x * y = \mathrm{e}.$$

Bu örnek, "Her sayının tersi var" cümlesinin bir kısaltması olarak anlaşılabilir.

2. Bir **durum** (situation), matematikte çoğunlukla bir **yapıdır** (structure). Örneğin çarpma işlemi ve *bir* elemanı ile sayma sayıları, $(\mathbb{N}, \times, 1)$ olarak yazılabilen yapı oluşturur. Özel olarak $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Benzer şekilde $(\mathbb{Q}^+, \times, 1)$, $(\omega, +, 0)$, ve $(\mathbb{Z}, +, 0)$ yapıları vardır. Burada $\mathbb{Q}^+$ kümesinin elemanları, pozitif kesirli sayılardır; ω (*omega*), $\{0, 1, 2, \dots\}$ doğal sayılar kümesidir; ve $\mathbb{Z}$'nin elemanları, tamsayılardır. Öklid geometrisinde bir durum, sayfa 17'deki Şekil 4'teki gibi bir **harfli diyagramdan** (lettered diagram [7]) anlaşılabilir.

3. **Doğruluk** (truth) ve **yanlışlık** (falsity), örneklerden anlaşılır. "Her sayının tersi var" önermesi,

- $(\mathbb{N}, \times, 1)$ yapısında yanlıştır,
- $(\mathbb{Q}^+, \times, 1)$ yapısında doğrudur,
- $(\omega, +, 0)$ yapısında yanlıştır,
- $(\mathbb{Z}, +, 0)$ yapısında doğrudur.

Doğruluk ve yanlışlık, sırasıyla

$$1, \qquad\qquad\qquad 0$$

x	y	$x \cdot y$	$x + y$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	0

Şekil 2. Modül 2'ye göre hesaplamalar

olarak yazacağız; bunlar **doğruluk değerleridir** (truth values). Başka kaynaklarda 1 ve 0'ın yerine D ve Y, ya da $\top$ ve $\bot$ işaretleri kullanılabilir. Belli bir durumda, bir önerme doğru ise, o önermenin o durumdaki doğruluk değeri 1'dir; yanlış ise, önermenin durumdaki doğruluk değeri 0'dır.

Sonuç olarak her $\mathfrak{D}$ durumu, bir **doğruluk göndermesi** (truth function) belirtir [6, s. 60–1]. Bu gönderme, her önermeyi $\mathfrak{D}$'deki doğruluk değerine gönderir. Mesela d_1, $(\mathbb{N}, \times, 1)$ yapısı tarafından belirtilen doğruluk göndermesi olsun. O zaman

$$d_1(\text{“Her sayının tersi var”}) = 0.$$

Eğer d_2, $(\mathbb{Q}^+, \times, 1)$ yapısı tarafından belirtilen doğruluk göndermesiyse, o zaman

$$d_2(\text{“Her sayının tersi var”}) = 1.$$

Sıfır ve 1 doğruluk değerleriyle, Şekil 2'deki gibi modül 2'ye göre hesaplamalar yapılabilir. Aslında 0 ve 1, $\mathbb{Z}_2$ *halkasını* ve aynı zamanda $\mathbb{F}_2$ *cismini* oluşturur, ve bu halka veya cisimde 0 ve 1 ile hesaplamalar yapılır.

2. Bileşik Önermeler

Verilmiş önermeler tarafından

- "ve, veya, ancak" ve "eğer" **bağlaçları** (conjunctions),
- "ise" ve "-ma/-me" **ekleri** (affixes), ve
- "değil" **belirteci** (adverb)

ile **bileşik önermeler** (compound propositions) oluşturulabilir. Her birinin doğruluk değeri, oluşturan önermelerin değerlerinden kullanılan bağlaç, ek, veya belirtece göre bulunur.

2.1. Tümel-evetlemeler

Mesela iki önermemiz olsun, ve onlara P ve Q ("kü") diyelim. O zaman "P ve Q" önermesini yapabiliriz. Eğer P doğru ve Q doğru ise, o zaman "P ve Q" önermesi doğrudur; diğer durumlarda yanlıştır. Bileşik "P ve Q" önermesini

$$P \wedge Q$$

olarak yazalım: böyle bir önerme, bir **tümel-evetlemedir** (conjunction). Her d doğruluk göndermesi için

$$d(P) \cdot d(Q) = d(P \wedge Q),$$

ve tümel-evetlemenin olası değerleri, Şekil 3'ün (a) şıkkındaki **doğruluk tablosunda** (truth table) gösterilebilir.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

(a) Tümel-evetleme

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

(b) Koşullu

Şekil 3. Doğruluk tabloları

2.2. Koşullular

Birçok önemli matematiksel önerme "Eğer P ise, o zaman Q" (kısaca "P ise Q") biçimindedir. Böyle bir önerme **koşulludur** (conditional) ve

$$P \to Q$$

şeklinde yazılabilir. Tek-saplı okun yerine iki-saplı $\Rightarrow$ oku kullanılabilir; özellikle eski kitaplarda $\supset$ işareti de kullanır. Eğer P yanlış veya Q doğru ise, o zaman $P \to Q$ önermesi doğrudur; diğer durumda P doğru, ama Q yanlış, ve $P \to Q$ yanlıştır. Bu şekilde her d doğruluk göndermesi için

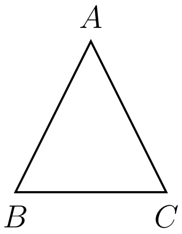
$$\left.\begin{array}{rr} \text{eğer } d(P) = 0 \text{ veya } d(Q) = 1 \text{ ise,} & 1 \\ \text{eğer } d(P) = 1 \text{ ve } d(Q) = 0 \text{ ise,} & 0 \end{array}\right\} = d(P \to Q).$$

O zaman kontrol edebildiğiniz gibi

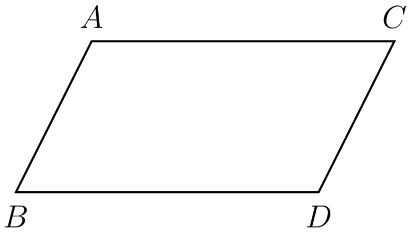
$$d(P \to Q) = 1 + d(P) + d(P) \cdot d(Q).$$

$P \to Q$ önermesinin doğruluk tablosu Şekil 3'ün (b) şıkkındadir. Örneğin Öklid'in 6. önermesine bakalım [8]:

> Eğer bir üçgenin iki açısı birbirine eşit ise,
> eşit açıların gördüğü kenarlar da eşittir.



(a) Bir üçgen



(b) Bir dörtgen

Şekil 4. Harfli diyagramlar

Şekil 4'ün (a) şıkkındaki ABC üçgenini bir yapı olarak düşünebiliriz, ve bu yapı için, bir d doğruluk göndermesi vardır. Şimdi

- P, "B köşesindeki açı C köşesindeki açıya eşittir" önermesi olsun;
- Q, "AC kenarı AB kenarına eşittir" önermesi olsun.

Bu durumda Öklid'in 6. önermesine göre $d(P \to Q) = 1$.

Alıştırma 1. Yukarıdaki P ve Q için, öyle bir yapı bulun ki, bu yapıda $d(P \to Q) = 0$ olsun. (*İpucu*: C köşesindeki açı ACB açısı olmayabilir, çünkü incelenen yapı bir üçgen olmayabilir. Şekil 4'ün (b) şıkkına bakın.)

Öklid'in yukarıdaki önermesinin kendisi, **evrensel** veya **tümel** (universal) bir önermedir, çünkü *her* üçgen hakkındadır. Eğer tekrar ABC, Şekil 4'ün (a) şıkkındaki gibi bir üçgen ise, o zaman yukarıdaki $P \to Q$ önermesi, Öklid'in önermesinin bir **özellemesidir** [3, s. 139] (instantiation).

2.3. Diğer bileşik önermeler

Doğruluk tablolarıyla, kullanacağımız tüm bileşik önermeler, sözcükler ve simgeler olarak Şekil 1'dedir.

Her d doğruluk göndermesi için aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir.

$$d(\neg P) = 1 + d(P),$$
$$d(P \leftrightarrow Q) = 1 + d(P) + d(Q),$$
$$d(P \vee Q) = d(P) + d(Q) + d(P) \cdot d(Q).$$

Her $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, veya $\neg$ işaretine **bağlayıcı** (connective) deriz. Hatırlamaya yardımcı olarak

- Latince VEL bağlacı, "veya" ($\vee$) demektir;
- İngilizce AND bağlacı, "ve" ($\wedge$) demektir.

Ayrıca kümeler kuramında A ve B kümeyse

- $x \in A \cup B$, $x \in A \vee x \in B$ demektir;
- $x \in A \cap B$, $x \in A \wedge x \in B$ demektir.

Daha sonra 0 ve 1 bile bağlayıcı olarak sayılacaktır. Başka kaynaklarda

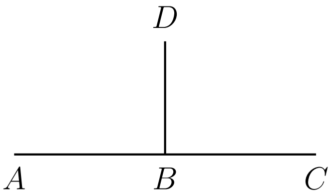
- $P \wedge Q$ ifadesinin yerine $P \mathbin{\&} Q$ veya $P \,.\, Q$,
- $P \rightarrow Q$ ifadesinin yerine $P \Rightarrow Q$ veya $P \supset Q$,
- $P \leftrightarrow Q$ ifadesinin yerine $P \Leftrightarrow Q$ veya $P \equiv Q$, ve
- $\neg P$ ifadesinin yerine $\sim P$ veya P'

görülebilir.

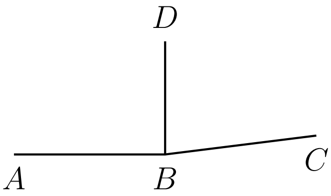
2.4. Tikel-evetlemeler

Öklid'in 13. önermesi (daha doğrusu, onun özellemesi), $P \vee Q$ biçiminde yazılabilir. O önerme aşağıdaki gibidir:

Bir doğru bir doğrunun üzerine konulursa yaptığı açılar,



(a) Doğrunun üzerine doğru



(b) İki bitişik açı

Şekil 5. Öklid'in 13. ve 14. önermeleri

ya iki dik açıdır
ya da iki dik açıya eşittir.

Şekil 5'in (a) şıkkında ABC bir doğru olsun, ve BD başka bir doğru olsun. Bu durumun doğruluk göndermesi d_1 olsun. Şimdi

- P, "ABD ve CBD açıları diktir" önermesi olsun, ve
- Q, "ABD ve CBD açıları iki dik açıya eşittir" önermesi olsun.

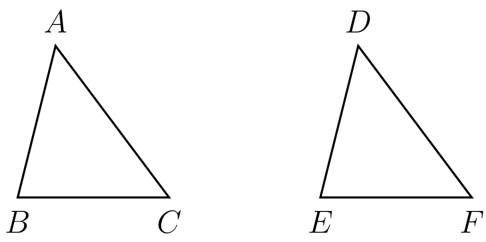
O zaman Öklid'in 13. önermeye göre

$$\text{ya } d_1(P) = 1 \text{ ya da } d_1(Q) = 1.$$

2.5. Birleştirilmiş bileşik önermeler

Bir önermede birden fazla bağlayıcı bulunabilir. Aslında Öklid'in 13. önermesi böyle düşünülebilir. Şekil 5'in (b) şıkkındaki gibi ABD ve DBC bitişik açılar olsun, ve bu durumun doğruluk göndermesi d_2 olsun. Ayrıca

- P ve Q, yukarıdaki gibi olsun,
- F, $P \vee Q$ önermesi olsun, ve
- R, "AB ve BC doğruları doğrusaldır" önermesi olsun.



Şekil 6. İki üçgen

O zaman Öklid'in 13. önermeye göre $d_2(R \to F) = 1$. Üstelik

- 14. önermeye göre $d_2(Q \to R) = 1$;
- dik açının tanımına göre $d_2(P \to R) = 1$.

O zaman $d_2(F \to R) = 1$. Sonunda, tüm bunlara göre

$$d_2(R \leftrightarrow F) = 1.$$

Başka bir örnek için, Öklid'in 4. önermesine bakalım:

İki üçgenin iki kenarı iki kenara eşit olursa
(her biri birine)
ve açı açıya eşit olursa (yani eşit doğrular tarafından içerilen)
hem taban tabana eşit olacak,
hem üçgen üçgene eşit olacak,
hem de geriye kalan açılar geriye kalan açılara eşit olacak
(her biri birine, yani eşit kenarları görenler).

Bu önerme, $F \to G$ biçimindedir, ama F ve G önermelerin kendisi de bileşiktir. Aslında Şekil 6'yı kullanarak

- P_1, "AB kenarı DE kenarına eşittir" önermesi olsun,
- P_2, "AC kenarı DF kenarına eşittir" önermesi olsun,
- P_3, "BAC açısı EDF açısına eşittir" önermesi olsun,
- P_4, "BC kenarı EF kenarına eşittir" önermesi olsun,
- P_5, "ABC üçgeni DEF üçgenine eşittir" önermesi olsun,

- P_6, "ABC açısı DEF açısına eşittir" önermesi olsun, ve
- P_7, "ACB açısı DFE açısına eşittir" önermesi olsun.

Ayrıca

- F, $P_1 \land P_2 \land P_3$ önermesi olsun, ve
- G, $P_4 \land P_5 \land P_6 \land P_7$ önermesi olsun.

ABC ve DEF üçgenleri için bir d_3 doğruluk göndermesi vardır, ve Öklid'in 4. önermeye göre $d_3(F \to G) = 1$, yani $d_3(F) = 0$ veya $d_3(G) = 1$. Üstelik $d_3(F) = 1$ ancak ve ancak

$$d_3(P_1) = d_3(P_2) = d_3(P_3) = 1;$$

ve $d_3(G) = 1$ ancak ve ancak

$$d_3(P_4) = d_3(P_5) = d_3(P_6) = d_3(P_7) = 1.$$

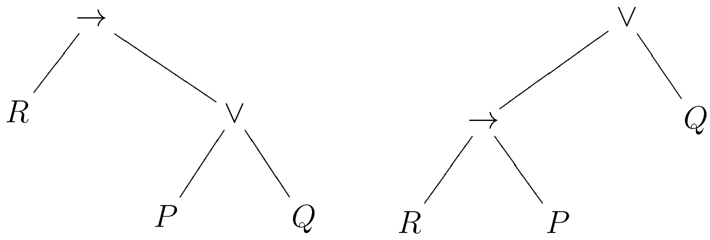
Bileşik bir önermenin bağlayıcılarından sadece biri, önermenin **anabağlayıcısıdır** (main connective). Tekrar Öklid'in 13. ve 14. önermeleri örneğine bakın. Orada $R \to F$ önermesinin anabağlayıcısı, $\to$ bağlayıcısıdır. O önermede $\lor$ bağlayıcısı bulunur, çünkü F'de bulunur, ama $\lor$, $R \to F$ önermesinin anabağlayıcısı değil, F önermesinin anabağlayıcısıdır.

F önermesinin $P \lor Q$ olduğu $R \to F$ önermesi, şu anda $R \to P \lor Q$ olarak yazılamaz, çünkü bu ifade, önermenin anabağlayıcısını göstermez. Şimdilik önermemiz

$$R \to (P \lor Q)$$

gibi bir ifade olarak yazılabilir, veya Şekil 7'nin (a) şıkkındaki **ağaç** (tree) olarak çizilebilir.

$P_1 \land P_2 \land P_3$ önermesinin anabağlayıcısı bir $\land$ bağlayıcısıdır, ama hangisi? Bu önermede $\land$ bağlayıcısının iki **geçişi** (occurrence) [5, s. 65] vardır. Hangisinin anabağlayıcı olduğu fark etmez. (Neden?) Kesinlik için son geçiş olsun diyelim. O zaman



(a) $R \to (P \vee Q)$ (b) $(R \to P) \vee Q$

Şekil 7. Ağaç olarak önermeler

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \text{ demek } P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3) \text{ demektir.}$$

Aynı şekilde

$$P_4 \wedge P_5 \wedge P_6 \wedge P_7,\ P_4 \wedge (P_5 \wedge (P_6 \wedge P_7)) \text{ demektir.}$$

Ancak $P \to Q \to R$ önermesindeki $\to$ bağlayıcısının hangi geçişinin önermenin anabağlayıcısı olduğu önemlidir. (Neden?) Tekrar son geçiş olsun diyelim:

$$P \to Q \to R \text{ demek } P \to (Q \to R) \text{ demek olsun.}$$

3. Önerme Formülleri

3.1. Özyineli tanım

P, Q, ve R gibi Latin harfleri, ve P_1 ve P_2 gibi bileşik simgeler, gerçekten önermeler değil, **önerme değişkenleridir** (propositional variables). Aşağıdaki dört kuralı kullanarak, önerme değişkenlerinden, bağlayıcılardan, ve ayraçlardan **önerme formüllerini** (propositional formulas) oluştururuz:

1. Her önerme değişkeni, bir önerme formülüdür.
2. Eğer F ve G, önerme formülleriyse, o zaman

$$(F \wedge G), \qquad (F \vee G), \qquad (F \to G), \qquad (F \leftrightarrow G)$$

   ifadeleri de önerme formülleridir.
3. Eğer F, önerme formülüyse, o zaman

$$\neg F$$

   ifadesi de bir önerme formülüdür.
4. Ayrıca

$$0, \qquad\qquad 1$$

   simgeleri, önerme formülleridir.

Örneğin

$$P, \qquad (P \wedge Q), \qquad (R \vee 1),$$
$$((P \wedge Q) \to (R \vee 1)), \qquad \neg((P \wedge Q) \to (R \vee 1)),$$

$$(\neg((P \wedge Q) \to (R \vee 1)) \leftrightarrow 0)$$

ifadeleri, önerme formülleridir.

Her bağlayıcı için, bir ve tek bir n doğal sayısı için, bağlayıcı n-**konumlu** (n-place) veya n-**lidir** (n-ary):

- $\wedge$, $\vee$, $\to$, ve $\leftrightarrow$, **iki-konumlu** (two-place) veya **ikilidir** (binary);
- $\neg$, **bir-konumlu** (one-place) veya **birlidir** (singulary, "unary");
- 0 ve 1, **sıfır-konumlu** (zero-place) veya **sıfırlıdır** (nullary).

Sıfırlı bir bağlayıcı, bir **sabittir** (constant).

Formüllerin tanımındaki gibi, formüller göstermek için

$$F, \qquad G, \qquad H, \qquad K, \qquad L$$

Latin harflerini kullanıyoruz. Bu harflerin hiç birinin kendisi formül değildir, formül için **dizimsel değişkendir** [5, s. 49] (syntactical variable [2, s. 60]). Benzer şekilde bir iki-konumlu bağlayıcı için dizimsel değişken olarak

$$*, \qquad \dagger$$

(yani **yıldız** [star, asterisk], **kama** [dagger, obelisk]) işaretlerini kullanacağız, ve bir sabit için

$$e$$

harfini kullanacağız. O zaman tanıma göre

(1) önerme değişkenleri,
(2) $(F * G)$,
(3) $\neg F$, ve
(4) e

biçimli ifadeler, önerme formülleridir. Bu tür tanımlara **özyinelemeli, özyineli,** veya **yinelgen** [5, s. 149] (recursive) tanım denir.

3.2. Anabağlayıcılar

Bileşik formüller,

$$(F * G), \qquad \neg F, \qquad e$$

biçimli formüllerdir. (Bir sabit bile bileşik sayılır.) Bunların **anabağlayıcıları,** sırasıyla

$$*, \qquad \neg, \qquad e$$

bağlayıcılarıdır. Her formülün *tek* anabağlayıcısının olduğunu kanıtlayacağız.

$(F * G)$ biçimli formüllerine **ikili bileşikler** (binary compounds) diyelim. O zaman her bileşik formül ya bir sabit, ya da bir değilleme, ya da bir ikili bileşiktir. Ayrıca

- sabit formüller sabit ile,
- değillemeler $\neg$ ile,
- ikili bileşikler ayraç ile

başlar. O zaman

- bir sabit, ne değilleme ne ikili bileşik olabilir;
- değilleme, ikili bileşik olamaz.

Sonunda ikili bir bileşiğin tek bir şekilde ikili olduğunu kanıtlamalıyız. Önerme formüllerinin tanımı özyineli olduğundan **tümevarım** (induction) yöntemini kullanabiliriz.

Teorem 1. *Eğer bir $(F * G)$ formülü bir $(H \dagger K)$ formülüyle aynı ise, o zaman F ve H formülleri de birbiriyle aynıdır.*

Kanıt. Bir önerme formülünün sonuna yeni simgeler eklenerek yeni önerme formülünün elde edilemeyeceğini göstermek yeter. Aslında her L formülü için

- hem sonuna yeni simgeler eklenerek

- hem de sonundan simgeler kaldırılarak

yeni bir önerme formülünün elde edilemeyeceğini göstereceğiz.

1. L bir önerme değişkeniyse, iddiamız doğrudur.

2. Tümevarım hipotezi olarak L'nin ya F ya da G formülü olduğu durumda iddiamızın doğru olduğunu varsayalım. Şimdi L, bir $(F * G)$ formülü olsun. Mümkünse, sonuna yeni simgeler eklenerek veya sonundan simgeler kaldırılarak yeni bir formül çıkarılsın. Bu formül $(H \dagger K)$ biçiminde olmalıdır, çünkü ayraç ile başlar. Eğer F ve H birbiriyle aynıysa, o zaman ya G, K'nin başından bir parçasıdır, ya da K, G'nin başından bir parçasıdır. Varsayımımıza göre bu mümkün değildir. Aynı şekilde F ve H birbirinden farklı olamaz. Böylece L bir $(F * G)$ formülü ise, iddiamız doğrudur.

3. Benzer şekilde L formülünün bir F formülü olduğu zamanda iddiamız doğru ise, L formülünün $\neg F$ formülü olduğu zamanda da doğrudur.

4. L ya 0 ya da 1 ise, iddiamız doğrudur.

Böylece her durumda iddiamız doğrudur. □

Alıştırma 2.

(a) Her $(F * G)$ formülü sadece

$$F * G$$

olarak yazılırsa, Teorem 1'in yanlış olduğunu gösterin.

(b) Her $(F * G)$ formülü

$$(F * G$$

olarak yazılırsa, teoremin hala doğru olduğunu gösterin.

(c) Her $(F * G)$ formülü

$$F * G)$$

olarak yazılırsa, teorem hala doğru mudur?

altformül	anabağlayıcısı
$\Big(\neg\big((P \wedge Q) \to (R \vee 1)\big) \leftrightarrow 0\Big)$	$\leftrightarrow$
$\neg\big((P \wedge Q) \to (R \vee 1)\big)$	$\neg$
$\big((P \wedge Q) \to (R \vee 1)\big)$	$\to$
$(P \wedge Q)$	$\wedge$
P	(yok)
Q	(yok)
$(R \wedge 1)$	$\wedge$
R	(yok)
1	1
0	0

Şekil 8. Bir formülün altformüller ve anabağlayıcıları

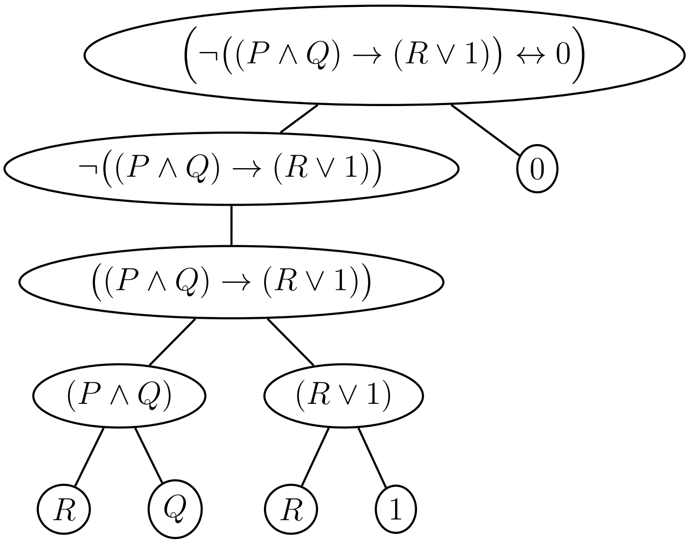
3.3. Altformüller

Bir önerme formülünün **altformülleri** (subformulas) aşağıdaki kurallara uyar.

- Her önerme formülü, kendisinin altformülüdür.
- F'nin veya G'nin altformülü olan her formül, $(F * G)$ formülünün bir altformülüdür.
- F formülünün her altformülü, $\neg F$ formülünün bir altformülüdür.

Örneğin $\Big(\neg\big((P \wedge Q) \to (R \vee 1)\big) \leftrightarrow 0\Big)$ formülünün altformülleri, Şekil 8'deki tabloda sıralanmıştır. Teorem 1 sayesinde verilen formülün *tüm* altformülleri tablodadır. Aynı şekilde bir F formülünün altformülleri

$$\operatorname{altf}(F)$$



Şekil 9. Düğümleri formül olan bir ağaç

kümesini oluşturursa, o zaman her P önerme değişkeni için

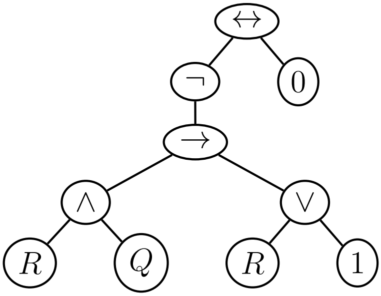
$$\operatorname{altf}(P) = \{P\},$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}
\operatorname{altf}(F * G) &= \{(F * G)\} \cup \operatorname{altf}(F) \cup \operatorname{altf}(G), \\
\operatorname{altf}(\neg F) &= \{\neg F\} \cup \operatorname{altf}(F), \\
\operatorname{altf}(e) &= \{e\}.
\end{aligned}$$

Önerme formüllerinin kendisinin tanımı gibi altformüllerin tanımı özyinelidir, ama bu yeni tanım Teorem 1'e dayanır.

Bir formülün altformüllerinin kendileri veya anabağlayıcıları, Şekil 9 ve 10'daki gibi bir (ve tek bir) ağacın **düğümleri** olarak çizilebilir.



Şekil 10. Düğümleri bağlayıcı veya değişken olan bir ağaç

Teorem 2. *Bir formülde, ne değişken ne ayraç olan her simge, bir ve sadece bir altformülün anabağlayıcısıdır.*

Kanıt. Tümevarım ve Teorem 1'i kullanacağız.

1. Bir değişken için iddiamız doğrudur.

2. İddiamız F ve G için doğru olsun. Bir $(F*G)$ formülünün her altformülü, ya formülün kendisidir, ya F altformülünün altformülüdür, ya da G altformülünün altformülüdür. Tanıma göre $*$ bağlayıcısının gördüğümüz geçişi, formülün kendisinin anabağlayıcısıdır. Teorem 1'in kanıtı sayesinde $*$'ın bu geçişi başka altformülün anabağlayıcısı olamaz. Varsayımımıza göre, bir † bağlayıcısının F formülündeki geçişi, F formülünün tek bir altformülünün anabağlayıcısıdır. O zaman †'nın geçişi, $(F*G)$ formülünün tek bir altformülünün anabağlayıcısıdır. G için aynı şey doğrudur. O zaman her $(F*G)$ formülü için iddiamız doğrudur.

3. Benzer şekilde iddıamız F için doğru ise, $\neg F$ için de doğrudur.

4. İddıamız 0 ve 1 için doğrudur.

Tümevarımdan iddıamız doğrudur. □

Bundan sonra bir **doğruluk göndermesi,**

$d(F)$	$d(G)$	$d(F \wedge G)$	$d(F \vee G)$	$d(F \to G)$	$d(F \leftrightarrow G)$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

$d(F)$	$d(\neg F)$
0	1
1	0

$d(1)$
1

$d(0)$
0

Şekil 11. Doğruluk göndermesi kuralları

- tanım kümesi önerme formüllerinden oluşan kümesi olan,
- değer kümesi $\{0, 1\}$ olan,
- Şekil 11'deki kurallara uyan

bir d fonksiyonudur. Her doğruluk göndermesinin altında bir formülün değeri, formülün **doğruluk tablosunda** gösteriliyor. F bir önerme formülü ve d bir doğruluk göndermesiyse, $d(F)$ değerini hesaplamak için, F formülünün her G altformülü için $d(G)$ değerini hesaplamalıyız. Bu $d(G)$ değeri, F formülünün doğruluk tablosunda,

1) eğer G bir değişkense, G altında,
2) eğer G değişken değilse, G formülünün anabağlayıcısı altında,

gösterilebilir. Mesela $\Bigl(\neg\bigl((P \wedge Q) \to (R \vee 1)\bigr) \leftrightarrow 0\Bigr)$ formülü için, Şekil 12'deki doğruluk tablosu çıkar. O zaman formülün kendisinin doğruluk tablosu, Şekil 13'te görünür. Hesaplamaların sırası, adım adım Şekil 14'te görünür. Her formülün doğruluk tablosunun var olduğundan dolayı, aşağıdaki

$\Big(\neg$	$\big(P$	$\wedge$	$Q)$	$\to$	$(R$	$\wedge$	$1)\big)$	$\leftrightarrow$	$0\Big)$
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Şekil 12. Altformüllerin değerlerini gösteren doğruluk tablosu

P	Q	R	$\Big(\neg\big((P \wedge Q) \to (R \vee 1)\big) \leftrightarrow 0\Big)$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Şekil 13. Formülün kendisinin doğruluk tablosu

$\big(\neg$	$\big((P$	$\wedge$	$Q)$	$\to$	$(R$	$\wedge$	$1)\big)$	$\leftrightarrow$	$0\big)$
	0		0		0		1		0
	1		0		0		1		0
	0		1		0		1		0
	1		1		0		1		0
	0		0		1		1		0
	1		0		1		1		0
	0		1		1		1		0
	1		1		1		1		0
	0	0	0		0	0	1		0
	1	0	0		0	0	1		0
	0	0	1		0	0	1		0
	1	1	1		0	0	1		0
	0	0	0		1	1	1		0
	1	0	0		1	1	1		0
	0	0	1		1	1	1		0
	1	1	1		1	1	1		0
	0	0	0	1	0	0	1		0
	1	0	0	1	0	0	1		0
	0	0	1	1	0	0	1		0
	1	1	1	0	0	0	1		0
	0	0	0	1	1	1	1		0
	1	0	0	1	1	1	1		0
	0	0	1	1	1	1	1		0
	1	1	1	1	1	1	1		0
0	0	0	0	1	0	0	1		0
0	1	0	0	1	0	0	1		0
0	0	0	1	1	0	0	1		0
1	1	1	1	0	0	0	1		0
0	0	0	0	1	1	1	1		0
0	1	0	0	1	1	1	1		0
0	0	0	1	1	1	1	1		0
0	1	1	1	1	1	1	1		0
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Şekil 14. Doğruluk tablosu hesaplanması

teorem doğrudur.

Teorem 3. *Her P önerme değişkeni için bir e_P doğruluk değeri seçilmiş olsun. O zaman bir ve tek bir d doğruluk göndermesi için, her P için*

$$d(P) = e_P.$$

Kanıt. Buradaki d doğruluk göndermesi, özyineleme ile tanımlanır. Aslında Sayfa 18'deki gibi

$$\begin{aligned} d(\neg F) &= 1 + d(F), \\ d(F \leftrightarrow G) &= 1 + d(F) + d(G), \\ d(F \vee G) &= d(F) + d(G) + d(F) \cdot d(G), \\ d(e) &= e. \end{aligned}$$

Teorem 1'den dolayı böyle bir tanımın yapılması mümkündür.

□

Son bölümde dediğimiz gibi, önerme formüllerinde bazı ayraçlar gerekmez ve kullanılmayabilir. Örneğin dış ayraçlar silinebilir. Başka ayraçların silinebilmesi için, doğruluk değerleri aşağıdaki sırada hesaplansın:

1) 0 ve 1,
2) $\neg$,
3) $\wedge$ ve $\vee$,
4) $\to$ ve $\leftrightarrow$,
5) bir bağlayıcının iki geçişi varsa, sağdaki.

Örneğin:

a) $F * G$ demek $(F * G)$ demektir,
b) $\neg F * G$ ve $\neg(F * G)$ farklıdır,
c) $F \to G \vee H$ demek $F \to (G \vee H)$ demektir,
d) $F \wedge G \vee H$ belirsiz (onun için yazılmaz),

e) $F \wedge G \wedge H$ demek $F \wedge (G \wedge H)$ demektir,
f) $F \to G \to H$ demek $F \to (G \to H)$ demektir,
g) $F \to G \wedge H \to K$ demek $F \to ((G \wedge H) \to K)$ demektir.

Alıştırma 3. Aşağıdaki değişkensiz formülleri hesaplayın.

a) $1 \to 1 \to 1$,
b) $1 \to 0 \to 1$,
c) $(0 \to 1) \leftrightarrow 1$,
d) $(0 \leftrightarrow 1) \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 1$,
e) $0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 \leftrightarrow 1$,
f) $\neg\neg\neg 0$,
g) $(1 \vee 0) \wedge 0$,
h) $1 \vee (0 \wedge 0)$.

Alıştırma 4. Aşağıdaki formüllerin doğruluk tablolarını yapın:

a) $P \to Q \to P$,
b) $P \wedge Q \wedge R$,
c) $\neg(P \leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow R))$,
d) $(P \to Q \vee R) \to \neg P \vee Q$,
e) $(P \to Q \vee \neg R) \wedge (Q \to P \wedge R) \to P \to R$,
f) $\neg(\neg R \to P \to \neg(R \to Q))$.

Kısım II.

Kanıtlar

4. Denklik

İki önermenin doğruluk değeri her durumda aynıysa, o önermeler, mantıksal olarak birbirine **eşdeğer** veya **denktir.**

İki önerme *formülünün* doğruluk tabloları aynıysa, o formüller de birbirine **eşdeğer** veya **denktir.** Her formül kendisine de denktir.

Zaten sayfa 18'de başlayan Öklid'in 13. ve 14. önermeleri örneğinde denklikler kullandık. Mesela $P \vee Q \to R$ önermesi $(P \to R) \wedge (Q \to R)$ önermesine denktir. ($P \vee Q \to R$ ifadesinin $((P \vee Q) \to R)$ demek olduğunu hatırlayın.) Bu önermelerin doğruluk tablolarını hesaplayalım:

P	$\vee$	Q	$\to$	R	(	P	$\to$	R	)	$\wedge$	(	Q	$\to$	R	)
0	0	0	1	0		0	1	0		1		0	1	0	
1	1	0	0	0		1	0	0		0		0	1	0	
0	1	1	0	0		0	1	0		0		1	0	0	
1	1	1	0	0		1	0	0		0		1	0	0	
0	0	0	1	1		0	1	1		1		0	1	1	
1	1	0	1	1		1	1	1		1		0	1	1	
0	1	1	1	1		0	1	1		1		1	1	1	
1	1	1	1	1		1	1	1		1		1	1	1	

Böylece Şekil 15'teki tabloları elde ederiz. Bu tablolar, birbiriyle aynıdır; onun için

$$P \vee Q \to R \text{ denktir } (P \to R) \wedge (Q \to R)$$

ifadesini yazacağız. Genelde, F ve G önerme formülleri eşdeğer ise,

$$F \sim G$$

P	Q	R	$P \vee Q \to R$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

P	Q	R	$(P \to R) \wedge (Q \to R)$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Şekil 15. İki formülün doğruluk tabloları

ifadesini de yazabiliriz. Örneğin

$$P \vee Q \to R \sim (P \to R) \wedge (Q \to R).$$

Ancak, dikkatli olunmalı: $F \sim G$ ifadesi önerme formülü değil; sadece "F ve G formülleri, birbirine denktir" cümlesi için, yani

$$F \text{ denktir } G$$

cümlesi için, bir kısaltmadır.

Bir $F \to G$ önerme, **koşullu önermedir,** ve onun

1) **tersi** veya **evriği,** $G \to F$ cümlesidir,
2) **karşıt tersi,** $\neg G \to \neg F$ cümlesidir.

Teorem 4. *Bir koşullu önerme,*

1) tersine denk olmayabilir,
2) karşıt tersine her zaman denktir.

Kanıt. **Alıştırma 5.** □

Teorem 5. *Aşağıdaki eşdeğerliklerimiz vardır.*

1. *Her önerme, sadece $\neg$ ve $\wedge$ ile yazılabilir:*

$$\begin{aligned} P \vee Q &\text{ denktir } \neg(\neg P \wedge \neg Q), \\ P \to Q &\text{ denktir } \neg P \vee Q, \\ P \leftrightarrow Q &\text{ denktir } (P \to Q) \wedge (Q \to P). \end{aligned}$$

2. *Her önerme, sadece $\neg$ ve $\to$ ile yazılabilir:*

$$P \wedge Q \text{ denktir } \neg(P \to \neg Q).$$

3. *Çifte değilleme kaldırılabilir:*

$$\neg\neg P \text{ denktir } P.$$

4. *De Morgan* kuralları:*

$$\begin{aligned} \neg(P \vee Q) &\text{ denktir } \neg P \wedge \neg Q, \\ \neg(P \wedge Q) &\text{ denktir } \neg P \vee \neg Q. \end{aligned}$$

5. *$\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcılarının değişme özelliği:*

$$\begin{aligned} P \wedge Q &\text{ denktir } Q \wedge P, \\ P \vee Q &\text{ denktir } Q \vee P, \end{aligned}$$

   $\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcılarının birleşme özelliği:

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \wedge R &\text{ denktir } P \wedge (Q \wedge R), \\ (P \vee Q) \vee R &\text{ denktir } P \vee (Q \vee R). \end{aligned}$$

6. *$\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcıları birbiri üzerine dağılır:*

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &\text{ denktir } (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \\ P \vee (Q \wedge R) &\text{ denktir } (P \vee Q) \wedge (P \vee R). \end{aligned}$$

---

*Augustus De Morgan, 1806–71, Büyük Britanyalı matematikçi ve mantıkçı [11, 12].

7. Fazlalıklar:

$$\begin{array}{cc} P \wedge P \textit{ denktir } P, & P \vee P \textit{ denktir } P, \\ P \wedge \neg P \textit{ denktir } 0, & P \vee \neg P \textit{ denktir } 1, \\ P \wedge 1 \textit{ denktir } P, & P \vee 0 \textit{ denktir } P, \\ P \wedge 0 \textit{ denktir } 0, & P \vee 1 \textit{ denktir } 1. \end{array}$$

8. Yeni değişken:

$$P \textit{ denktir } (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q),$$
$$P \textit{ denktir } (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q).$$

9. Yutma:

$$P \wedge (P \vee Q) \textit{ denktir } P,$$
$$P \vee (P \wedge Q) \textit{ denktir } P.$$

Kanıt. **Alıştırma 6.** □

Bu teoremden, aşağıdaki teoremi kullanarak, sonsuz sayıda denklikler elde edebiliriz. Örneğin $P \to Q$ formülü $\neg P \vee Q$ formününe denk olduğundan

$$P \wedge Q \to R \text{ denktir } \neg(P \wedge Q) \vee R$$

denkliğini elde ederiz.

Teorem 6 (Değiştirim)**.** *F ve G birbirine denk olan formüller olsun, P bir önerme değişkeni olsun, ve H bir önerme formülü olsun. Eğer F formülünde P değişkeninin geçtiği her yere H konulursa, F' formülü elde edilsin; benzer şekilde, G formülünden G' elde edilsin. O zaman*

$$F' \textit{ denktir } G'.$$

Kanıt. F veya G formülünün değişkenleri P, Q_1, Q_2, $\ldots$, Q_n olsun, d bir doğruluk göndermesi olsun, ve Teorem 3'ü kullanarak d^* öyle bir doğruluk göndermesi olsun ki

$$d^*(P) = d(H), \quad d^*(Q_1) = d(Q_1), \quad \ldots, \quad d^*(Q_n) = d(Q_n)$$

olsun. O zaman (neden?)

$$d(F') = d^*(F), \qquad\qquad d(G') = d^*(G)$$

dolayısıyla $d^*(F) = d^*(G)$ olduğundan $d(F') = d(G')$. □

Alıştırma 7. Son kanıtta $d(F') = d^*(F)$ neden olduğunu anlatın.

Teoremde F' ve G' formülleri, F ve G formüllerinde P değişkeninin H formülü ile **değiştirim** (replacement) [5, s. 46] ile elde edilir.

Üstelik $\neg(P \wedge Q)$ formülü $\neg P \vee \neg Q$ formülüne denk olduğundan, sonraki teorem sayesinde,

$$\neg(P \wedge Q) \vee R \text{ denktir } (\neg P \vee \neg Q) \vee R$$

denkliğini elde ederiz.

Teorem 7 (Yerine Koyma)**.** *F formülü G formülünün bir altformülü olsun, ve F^* formülü F formülüne denk olsun. Eğer G formülünde F altformülünün yerine F^* konulursa, G^* formülü elde edilsin. O zaman*

$$G \text{ denktir } G^*.$$

Kanıt. **Alıştırma 8.** □

Teoremde G^* formülü, G formülündan **yerine koyma** (replacement) [5, s. 148] elde edilir. Şimdi aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 8. $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$ *formülü,*

$$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge S)$$

formülüne denktir.

Kanıt. Teorem 5'teki kuralları kullanarak aşağıdaki denklikleri elde ederiz.

$$\begin{array}{ll}
\quad (P \vee Q) \wedge (R \vee S) & \\
\sim ((P \vee Q) \wedge R) \vee ((P \vee Q) \wedge S) & \text{[Dağılma]} \\
\sim (R \wedge (P \vee Q)) \vee (S \wedge (P \vee Q)) & \text{[Değişme]} \\
\sim ((R \wedge P) \vee (R \wedge Q)) \vee ((S \wedge P) \vee (S \wedge Q)) & \text{[Dağılma]} \\
\sim (R \wedge P) \vee (R \wedge Q) \vee (S \wedge P) \vee (S \wedge Q) & \text{[Birleşme]} \\
\sim (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge S) & \text{[Değişme]}
\end{array}$$

Her adımda Değiştirim veya Yerine Koyma işlemlerini (veya ikisini) kullandık. □

Benzer şekilde:

Teorem 9.

$$\begin{gathered}
\neg P \vee (P \wedge Q) \text{ denktir } \neg P \vee Q, \\
P \vee (\neg P \wedge Q) \text{ denktir } P \vee Q, \\
\neg P \wedge (P \vee Q) \text{ denktir } \neg P \wedge Q, \\
P \wedge (\neg P \vee Q) \text{ denktir } P \wedge Q.
\end{gathered}$$

Kanıt. Aşağıdaki denkliklerimiz vardır.

$$\begin{array}{ll}
\quad \neg P \vee (P \wedge Q) & \\
\sim (\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) & \text{[Dağılma]} \\
\sim 1 \wedge (\neg P \vee Q) & \text{[Fazlalık]} \\
\sim \neg P \vee Q & \text{[Fazlalık]}
\end{array}$$

Diğer denklikler, **Alıştırma 9.** □

5. Gerektirme

Sayfa 36'daki tanıma göre, eğer her d doğruluk göndermesi için $d(F) = d(G)$ ise, o zaman F ve G birbirine denktir. Yani her d için

- $d(F) = 1$ ise $d(G) = 1$,
- $d(G) = 1$ ise $d(F) = 1$

durumunda $F \sim G$. Şimdi her d için $d(F) = 1$ ise $d(G) = 1$ olduğunu varsayalım. O zaman F formülü G formülünü **gerektirir** deriz.

Her formül kendisini gerektirir. Aşikâr olmayan örnek olarak Şekil 16'daki doğruluk tablosundan

$$P \vee Q \to R \text{ gerektirir } P \to R.$$

Bu doğrudur çünkü tablodaki her satırda, ya $P \vee Q \to R$ formülünün değeri 0, ya da $P \to R$ formülünün değeri 1. Tabii ki ikisi de olabilir.

Genelde, F formülü G formülünü gerektirirse,

$$F \vDash G$$

ifadesini yazabiliriz. Bu ifade, "F formülü G formülünü gerektirir" cümlesi için, yani

$$F \text{ gerektirir } G$$

cümlesi için, bir kısaltmadır. Örneğin

$$P \vee Q \to R \vDash P \to R.$$

P	Q	R	$P \vee Q \to R$	$P \to R$
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	1	0	0	0
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Şekil 16. Gerektirmeyi gösteren bir doğruluk tablosu

Teorem 10. *Aşağıdaki gerektirmelerimiz vardır.*

Basitleştirme:

$$P \wedge Q \textit{ gerektirir } P, \qquad P \wedge Q \textit{ gerektirir } Q.$$

Ekleme:

$$P \textit{ gerektirir } P \vee Q, \qquad Q \textit{ gerektirir } P \vee Q.$$

Kanıt. **Alıştırma 10.** □

İki formül de bir formülü gerektirebilir. F ve G formülleri H formülünü gerektirir, ancak ve ancak her d doğruluk göndermesi için ya $d(F) = 0$, ya $d(G) = 0$, ya da $d(H) = 1$. Mesela Şekil 17'deki doğruluk tablosundan

$$P \to Q \text{ ile } Q \to R \text{ gerektirir } P \to R.$$

Aslında sadece 1., 5., 7., ve 8. satırlarda hem $P \to Q$ ve $Q \to R$ doğrudur, ve o satırlarda $P \to R$ de doğrudur.

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Şekil 17. Gerektirmeyi gösteren bir doğruluk tablosu daha

Teorem 11. *Aşağıdaki gerektirmelerimiz vardır.*

Bağlama:

$$P \text{ ile } Q \text{ gerektirir } P \wedge Q.$$

Ayırma:

$$\begin{gathered} P \text{ ile } P \to Q \text{ gerektirir } Q, \\ \neg Q \text{ ile } P \to Q \text{ gerektirir } \neg P, \\ P \vee Q \text{ ile } \neg P \text{ gerektirir } Q, \\ P \vee Q \text{ ile } \neg Q \text{ gerektirir } P. \end{gathered}$$

Hipotetik Tasım:

$$P \to Q \text{ ile } Q \to R \text{ gerektirir } P \to R.$$

Kanıt. **Alıştırma 11.** (Hipotetik Tasım gerektirmesini Şekil 17'de ispatladık.) □

İkiden fazla formül, bir formül gerektirebilir. Γ (*Gamma*), bir önerme formülü *kümesi* olsun, ve F, bir önerme formülü olsun. Eğer her d doğruluk göndermesi için
1) ya Γ kümesinde bir G için $d(G) = 0$,
2) ya da $d(F) = 1$

sağlanıyorsa, o zaman Γ, F formülünü **gerektirir.** Yani Γ, F formülünü gerektirir ancak ve ancak $\Gamma \cup \{F\}$ kümesindeki bütün formüllerin doğruluk tablosunun her satırında,
1) ya Γ kümesindeki bir formül yanlıştır,
2) ya da F formülü doğrudur.

Teorem 12 (Olumlu Dilemma)**.** *Aşağıdaki gerektirmemiz vardır.*

$$P \to Q,\ R \to S \text{ ve } P \vee R \text{ gerektirir } Q \vee S.$$

Kanıt. Bu gerektirme, Şekil 18'deki doğruluk tablosundan görünebilir. Aslında sadece 4., 12., 13., 15., ve 16. satırlarda, hem $P \to Q$ hem $R \to S$ hem de $P \vee R$ doğru, ve o satırlarda $Q \vee S$ de doğru. □

Alıştırma 12. $P \vee Q \vee R$, $P \to Q$, ve $Q \to R$ gerektirir R olduğunu gösterin.

Bir önerme formülü, boş küme tarafından gerektirilebilir. Bu durumda, o formüle **(doğrusal) geçerli formül** veya **mantıksal doğru formül** veya **totoloji** denir.* O zaman F bir totoloji, ancak ve ancak her d doğruluk göndermesi için $d(F) = 1$. Mesela,

$$P \vee \neg P, \qquad\qquad 1$$

formülleri, totolojidirler. Aşağıdaki teoremden dolayı yukarıdaki teoremleri kullanarak yeni totolojiler elde edebiliriz.

*Ali Nesin [6], öyle formüllere *hepdoğru* adını verir.

P	Q	R	S	$P \to Q$	$R \to S$	$P \vee R$	$Q \vee S$
0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Şekil 18. Olumlu Dilemma için doğruluk tablosu

Teorem 13. *Aşağıdaki denkliklerimiz vardır.*

1. *F ve G formülleri birbirine denktir, ancak ve ancak*

$$F \leftrightarrow G$$

formülü bir totolojidir.

2. *F formülü G formülünü gerektirir, ancak ve ancak*

$$F \to G$$

formülü bir totolojidir.

3. *F ile G formülleri H formülünü gerektir, ancak ve ancak*

$$F \wedge G \to H$$

formülü bir totolojidir.

4. *F, G, ve H formülleri, K formülünü gerektir, ancak ve ancak*

$$F \wedge G \wedge H \to K$$

formülü bir totolojidir.

Kanıt. $F \sim G$, ancak ve ancak her d doğruluk göndermesi için $d(F) = d(G)$, yani $d(F \leftrightarrow G) = 1$. Diğer bölümler, **Alıştırma 13.** □

Sonraki teoremi görmek yararlı olabilir.

Teorem 14. *Γ, Δ (*Delta*) kümesinin her elemanını içersin. Yani Γ, Δ kümesini kapsasın ($\Delta \subseteq \Gamma$ olsun).*

$$\Delta \text{ gerektirir } F \text{ ise, o zaman } \Gamma \text{ gerektirir } F.$$

Kanıt. Gerektirme tanımından gelir. □

Bu teorem, sonraki teoremin özel durumudur.

Teorem 15. *Γ, Δ kümesindeki her formülü gerektirsin.*

$$\Delta \text{ gerektirir } F \text{ ise, o zaman } \Gamma \text{ gerektirir } F.$$

Kanıt. Gerektirme tanımından gelir. □

Sayfa 39'daki Teorem 6 (Değiştirim Teoremi) gibi bir teoremimiz vardır.

Teorem 16 (Değiştirim)**.** *Γ formüller kümesi G formülünü gerektirsin, P bir önerme değişkeni olsun, ve H bir önerme formülü olsun. Eğer Γ kümesinin her elemanında P değişkeninin geçtiği her yere H konulursa, Γ' formüller kümesi elde edilsin; benzer şekilde G formülünden G' formülü elde edilsin. O zaman*

$$\Gamma' \text{ gerektirir } G'.$$

Kanıt. **Alıştırma 14.** $\square$

Bu teorem dolayısıyla

$$\begin{aligned} P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P &\models \neg Q \lor R, && \text{[Ayırma (Teorem 11)]} \\ Q &\models \neg\neg Q, && \text{[Çifte Değilleme (Teorem 5)]} \\ \neg Q \lor R,\ \neg\neg Q &\models R. && \text{[Ayırma]} \end{aligned}$$

O zaman Teorem 14'ten dolayı

$$P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P,\ Q \models \neg Q \lor R,$$
$$P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P,\ Q \models \neg\neg Q,$$

ve Teorem 15'ten dolayı

$$P \lor \neg Q \lor R,\ \neg P,\ Q \models R.$$

Bu gerektirmeyi, doğruluk tabloları kullanmadan ispatladık. Gerektirmeyi kanıtlamak için, sadece

$$P \lor \neg Q \lor R, \quad \neg P, \quad \neg Q \lor R, \quad Q, \quad \neg\neg Q, \quad R \tag{5.1}$$

formülleri yazdık. Bu formüller listesi, *biçimsel bir kanıttır.* Böyle kanıtlar sonraki bölümün konusudur.

6. Biçimsel Kanıtlar

Eğer Γ,

$$\{\neg(S \wedge T),\ (R \wedge Q) \vee (T \wedge Q),\ P \vee (S \wedge \neg T),\\ \neg T \vee (Q \wedge (S \vee R)),\ \neg R \vee T\}$$

formüller kümesi ise, o zaman

$$\Gamma \text{ gerektirir } P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T. \tag{6.1}$$

Bunu doğruluk tablosu yöntemiyle göstermek sıkıcı olurdu. *Biçimsel kanıt* yöntemi, bu durumda hem daha kısa, hem daha ilginçtir.

Biçimsel kanıt, sadece bir formüller listesidir. Şimdi

$$F_1, \dots, F_n,$$

böyle bir liste olsun. Bu biçimsel kanıtın **sonucu,** F_n formülüdür. Şimdi $1 \leqslant k \leqslant n$ varsayılsın. Eğer $\{F_1, \dots, F_{k-1}\}$ kümesi F_k formülünü *gerektirmezse,* o zaman F_k, biçimsel kanıtın **hipotezlerinden** biridir. Eğer $k = 1$ ise, o zaman $\{F_1, \dots, F_{k-1}\}$ kümesi boştur: böylece F_1 ya totoloji, ya hipotezdir. Tanımımıza göre, biçimsel bir kanıtın sonucu bir hipotez de olabilir.

Tekrar sayfa 48'deki (5.1) listesine bakalım. Bu biçimsel kanıtın hipotezleri, $P \vee \neg Q \vee R$, $\neg P$, ve Q formülleridir. $\neg Q \vee R$, hipotez değildir, çünkü onu önceki formüller gerektirir; aynı nedenle, R de hipotez değildir.

Teorem 17. Γ *bir önerme formülleri kümesi olsun. Eğer bir* $F_1, \ldots, F_n$ *biçimsel kanıtın hipotezleri* Γ *kümesinden geliyorsa, o zaman*

$$\Gamma \text{ gerektirir } F_n.$$

Kanıt. $1 \leqslant k \leqslant n$ olmak üzere her k için $\{F_1, \ldots, F_{k-1}\}$ kümesi F_m formülü gerektirmezse, varsayıma göre F_m, Γ kümesindedir. Şimdi Teorem 14 dolayısıyla her k için

$$\Gamma \cup \{F_1, \ldots, F_{k-1}\} \vDash F_k,$$

yani

$$\begin{gathered}
\Gamma \text{ gerektirir } F_1,\\
\Gamma \cup \{F_1\} \text{ gerektirir } F_2,\\
\Gamma \cup \{F_1, F_2\} \text{ gerektirir } F_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Gamma \cup \{F_1, \ldots, F_{n-1}\} \text{ gerektirir } F_n.
\end{gathered}$$

O zaman Teorem 15'in yardımıyla

$$\begin{gathered}
\Gamma \text{ gerektirir } F_2,\\
\Gamma \text{ gerektirir } F_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Gamma \text{ gerektirir } F_n.
\end{gathered}$$

□

Teoremdeki biçimsel kanıt

- Γ kümesinden F_n formülünü **kanıtlar;**
- F_n **formülünün** Γ **kümesinden** gelen biçimsel bir kanıtıdır.

Son teoremin tersine göre Γ bir F formülünü gerektirirse, o zaman F formülünün Γ kümesinden gelen biçimsel kanıtı vardır. Teoremin tersi doğru mudur?

1. Γ *sonlu* ise, teoremin tersi kolayca çıkar. Aslında $\Gamma = \{F_1, \ldots, F_{n-1}\}$ ve $\Gamma \models F$ ise, o zaman $F_1, \ldots, F_{n-1}, F$ listesi, F formülünün Γ kümesinden gelen biçimsel bir kanıtıdır.
2. Γ kümesinin *sonsuz* olduğu durum için Bölüm 8'e bakın.

Sonlu durumda, Γ kümesinin F formülünü gerektirdiğini bir kişiye *göstermek* istersek, sadece $F_1, \ldots, F_{n-1}, F$ listesini yazmak yeterli olmayabilir; daha fazla formüller yazmamız gerekebilir. Örneğin sayfa 45'teki Alıştırma 12'yi yaptıysak, aşağıdaki listenin, R formülünün $P \vee Q \vee R$, $P \to Q$, $Q \to R$ hipotezlerinden bir biçimsel kanıtı olduğunu biliyoruz:

$$P \vee Q \vee R, \qquad P \to Q, \qquad Q \to R, \qquad R.$$

Ancak o alıştırmayı yapmadıysak, aşağıdaki gibi daha fazla adım gerekir:

$$\begin{gathered}
P \to Q, \\
\neg P \vee Q, \\
\neg P \vee Q \vee R, \\
Q \to R, \\
\neg Q \vee R, \\
(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R), \\
((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)) \vee R, \\
(\neg P \wedge \neg Q) \vee R, \\
\neg(P \vee Q) \vee R, \\
P \vee Q \vee R, \\
(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R), \\
(\neg(P \vee Q) \vee P \vee Q) \wedge R, \\
1 \wedge R,
\end{gathered}$$

$$R.$$

Şekil 19'daki gibi adımların nedenlerini ekleyebiliriz.

Alıştırma 15. Yukarıdaki (6.1) gerektirmesinin,

$$(R \wedge Q) \vee (T \wedge Q),$$
$$(R \vee T) \wedge Q,$$
$$Q,$$
$$R \vee T,$$
$$\neg R \vee T,$$
$$(R \vee T) \wedge (\neg R \vee T),$$
$$(R \wedge \neg R) \vee T,$$
$$1 \vee T,$$
$$T,$$
$$\neg(S \wedge T),$$
$$\neg S \vee \neg T,$$
$$\neg\neg T,$$
$$\neg S,$$
$$P \vee (S \wedge \neg T),$$
$$\neg S \vee \neg\neg T,$$
$$\neg(S \wedge \neg T),$$
$$P,$$
$$\neg T \vee (Q \wedge (S \vee R)),$$
$$Q \wedge (S \vee R),$$
$$S \vee R,$$
$$R,$$
$$R \wedge \neg S,$$

$$R \wedge \neg S \wedge T,$$
$$Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T,$$
$$P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S \wedge T$$

biçimsel kanıtı vardır. Her satırın nedenini verin.

Gördüğümüz biçimsel kanıtlarda, hipotez olmayan her satır, bildiğimiz kurallara göre önceki satırlar tarafından gerektirilir. Biçimsel kanıtlarda kullanılabilen kurallar kesinleştirilirse, *biçimsel bir dizge* elde edilir. Üç biçimsel dizgesini 9 numaralı bölümde inceleyeceğiz. Şimdilik tüm bildiğimiz kuralları kullanıyoruz.

Alıştırma 16. Aşağıdaki totolojiler ve gerektirmeler için biçimsel kanıtlar yazın.

1. $P \to P \to P$ bir totolojidir.
2. $P \to Q \to P$ bir totolojidir.
3. $P \vee (P \to Q)$ bir totolojidir.
4. $(P \to Q) \vee \neg Q$ bir totolojidir.
5. $P \to Q \wedge R$ gerektirir $P \to Q$.
6. $P \wedge \neg P$ gerektirir Q.
7. $P \wedge (Q \vee R)$ gerektirir $P \leftrightarrow (\neg Q \vee P)$.
8. $P \to Q$ ile $P \to \neg Q$ gerektirir $\neg P$.
9. $P \to R$ ile $Q \to R$ gerektirir $P \vee Q \to R$.
10. $P \to R$ ile $Q \to S$ gerektirir $P \vee Q \to R \vee S$.
11. $P \leftrightarrow Q$ ile $P \to R$ gerektirir $Q \to R$.

1.	$P \to Q$	Hipotez
2.	$\neg P \vee Q$	1. satıra denk
3.	$\neg P \vee Q \vee R$	2. satırdan Eklemeyle
4.	$Q \to R$	Hipotez
5.	$\neg Q \vee R$	4. satıra denk
6.	$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$	3. ve 5. satırdan Bağlamayla
7.	$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)) \vee R$	6. satırdan Dağılmayla
8.	$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$	7. satıra denk
9.	$\neg(P \vee Q) \vee R$	8. satırdan De Morgan Kuralıyla
10.	$P \vee Q \vee R$	Hipotez
11.	$(\neg(P \vee Q) \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$	9. ve 10. satırdan Bağlamayla
12.	$(\neg(P \vee Q) \vee P \vee Q) \wedge R$	11. satırdan Dağılmayla
13.	$1 \wedge R$	12. satırdan Fazlalıkla
14.	R	13. satırdan Fazlalıkla

Şekil 19. Açıklamalı biçimsel kanıt

7. Öklid'in Önermeleri

Öklid'in önermelerinin göstermeleri, daha biçimsel olarak yazılabilir. Örneğin 5. önermeye bakalım. Likyalı Proklus'a göre [9, s. 159], Öklid'in her önermesinin 6 tane parçası olabilir:

(1) bildirme,
(2) açıklama,
(3) belirtme,
(4) düzenleme,
(5) gösterme, ve
(6) bitirme.

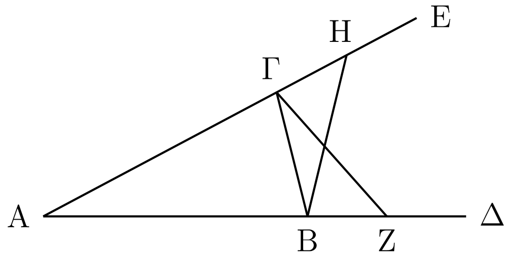
Açıklamada hipotezler bulunur; belirtmede sonuçlar bulunur. Çoğunlukla bir önermenin bir sonucu vardır; ama 5. önermenin iki sonucu vardır. Düzenleme ve gösterme, sonuçların hipotezlerinden biçimsel kanıt olarak yazılabilir. Göstermenin hipotezleri, düzenlemeden de gelebilir. O zaman parçalarıyla Öklid'in 5. önermesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

Bildirme:

- Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki açılar birbirine eşittir.
- Eşit doğrular uzatıldığında tabanın altında kalan açılar birbirine eşit olacaklardır.

Açıklama:

- Şekil 20'deki ΑΒΓ üçgeninde ΑΒ = ΑΓ.
- ΑΒ, Δ noktasına uzatılmış.
- ΑΓ, Ε noktasına uzatılmış.



Şekil 20. Öklid'in 5. önermesinin şekli

Belirtme:

1. $\angle\, \mathrm{AB\Gamma} = \angle\, \mathrm{A\Gamma B}$.
2. $\angle\, \mathrm{\Gamma B\Delta} = \angle\, \mathrm{B\Gamma E}$.

Düzenleme:

1. Z noktası, BΔ doğrusundadır.
2. H noktası, ΓE'dadır, ve $\mathrm{AH} = \mathrm{AZ}$. [Önerme 3]

Gösterme:

1.	$\mathrm{AZ} = \mathrm{AH}$	[düzenlemedeki 2. satırdan]
2.	$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$	[hipotez]
3.	$\mathrm{Z\Gamma} = \mathrm{HB}$	[1. ve 2. satırdan Önerme 4 ile]
4.	$\triangle\, \mathrm{AZ\Gamma} = \triangle\, \mathrm{AHB}$	[1. ve 2. satırdan Ön. 4 ile]
5.	$\angle\, \mathrm{A\Gamma Z} = \angle\, \mathrm{ABH}$	[1. ve 2. satırdan Ön. 4 ile]
6.	$\angle\, \mathrm{AZ\Gamma} = \angle\, \mathrm{AHB}$	[1. ve 2. satırdan Ön. 4 ile]
7.	$\mathrm{BZ} = \mathrm{\Gamma H}$	[1. ve 2. satırdan Ortak Kavram 3 ile]
8.	$\triangle\, \mathrm{BZ\Gamma} = \triangle\, \mathrm{\Gamma HB}$	[3., 6., ve 7. satırdan Ön. 4 ile]
9.	$\angle\, \mathrm{ZB\Gamma} = \angle\, \mathrm{H\Gamma B}$	[3., 6., ve 7. satırdan Ön. 4 ile]
10.	$\angle\, \mathrm{B\Gamma Z} = \angle\, \mathrm{\Gamma BH}$	[3., 6., ve 7. satırdan Ön. 4 ile]
11.	$\angle\, \mathrm{AB\Gamma} = \angle\, \mathrm{A\Gamma B}$	[5. ve 10. satırdan O.K. 3 ile]

Bitirme:

- Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki açılar birbirine eşittir.
- Eşit doğrular uzatıldığında tabanın altında kalan açılar birbirine eşit olacaklar.

Gösterilmesi gereken tam buydu.

Burada, belirtmedeki 1. sonuç, göstermenin 11. satırıdır, ve 2. sonuç, gösterinin 9. satırıdır, ama $\angle\ \mathrm{Z B \Gamma} = \angle\ \mathrm{\Gamma B \Delta}$ ve $\angle\ \mathrm{H \Gamma B} = \angle\ \mathrm{B \Gamma E}$ eşitliklerini tanımamız gerekir. Öklid, gösterinin 4. ve 8. satırını verir, ama kullanmaz.

Alıştırma 17. Biçimsel olarak Öklid'in her önermesini yazın.

Kısım III.

Kuram

8. Tıkızlık

Sayfa 51'de gösterdiğimiz gibi, her *sonlu* Γ önermeler kümesi için, eğer Γ bir F formülünü gerektiriyorsa, o zaman F formülünün Γ kümesinden gelen bir biçimsel kanıtı vardır. Sonluluk koşulunun kaldırılabildiğini göstereceğiz; bu gerçeğe **tıkızlık** denir.

Eğer bir d doğruluk göndermesi ve bir Δ formüller kümesi için Δ'nın her G elemanı için $d(G) = 1$ ise, o zaman d'ye Δ'nın bir **modeli** denir.

Teorem 18. *Γ gerektirir F ancak ve ancak $\Gamma \cup \{\neg F\}$'nin modeli yoktur.*

Kanıt. **Alıştırma 18.** □

Eğer Δ'nın her sonlu altkümesinin modeli varsa, Δ'ya **tutarlı** denir.

Lemma 1. *Eğer Γ tutarlı ise, o zaman her F formülü için, ya $\Gamma \cup \{F\}$ ya da $\Gamma \cup \{\neg F\}$ tutarlıdır.*

Kanıt. $\Gamma \cup \{F\}$ tutarlı olmasın. $\Gamma \cup \{\neg F\}$'nin tutarlı olduğunu göstereceğiz. Eğer Θ (*Theta*), Γ'nın sonlu bir altümesi ise, $\Theta \cup \{\neg F\}$'nin bir modeli bulmak yeter.

$\Gamma \cup \{F\}$ tutarlı olmadığından Γ'nın sonlu bir Δ altkümesi için $\Delta \cup \{F\}$'nin modeli yoktur.

$\Delta \cup \Theta$ birleşimi, Γ'nın sonlu bir altkümesidir. Γ tutarlı olduğundan $\Delta \cup \Theta$'nın bir d modeli vardır. Bu model, Δ'nın modelidir, dolayısıyla Δ'nın her G elemanı için $d(G) = 1$. Ama

$\Delta \cup \{F\}$'nin modeli olmadığından $d(F) = 0$. Bu durumda $d(\neg F) = 1$, dolayısıyla d, $\Theta \cup \{\neg F\}$'nin modelidir.

Böylece $\Gamma \cup \{\neg F\}$'nin her sonlu altkümesinin modeli vardır.

□

Teorem 19 (Tıkızlık). *Elemanları önerme formülü olan her tutarlı kümesinin modeli vardır.*

Kanıt. Δ tutarlı olsun. Δ'nın bir d^* modelini inşa edeceğiz.

Önerme değişkenleri $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ kümesini oluştursun. Teorem 3'e göre $d^*(P_k)$ değerlerini belirleyerek d^* göndermesinin kendisini tanımlayacağız. Özyineleme ile her k için bir F_k formülünü tanımlayacağız, ve bu formül ya P_k ya da $\neg P_k$ olacak. Her durumda $d^*(F_k) = 1$ olacak.

Adım 1. Eğer $\Delta \cup \{P_1\}$ tutarlı ise, o zaman F_1, P_1 olsun. Diğer durumda Lemma 1'e göre $\Delta \cup \{\neg P_1\}$ tutarlıdır. Bu durumda F_1, $\neg P_1$ olsun. Her durumda $\Delta \cup \{F_1\}$ tutarlıdır.

Adım 2. Eğer $\Delta \cup \{F_1, P_2\}$ tutarlı ise, o zaman F_2, P_2 olsun. Diğer durumda $\Delta \cup \{F_1, \neg P_2\}$ tutarlıdır. Bu durumda F_2, $\neg P_2$ olsun. Her durumda $\Delta \cup \{F_1, F_2\}$ tutarlıdır.

. . . .

Adım *k*. Eğer $\Delta \cup \{F_1, \dots, F_{k-1}, P_k\}$ tutarlı ise, o zaman F_k, P_k olsun. Diğer durumda F_k, $\neg P_k$ olsun.

. . . .

Tümevarımdan ve Lemma 1'den her k için $\Delta \cup \{F_1, \dots, F_k\}$ tutarlıdır. Şimdi

$$\left.\begin{array}{ll} \text{eğer } F_k,\ P_k \text{ ise} & 1 \\ \text{eğer } F_k,\ \neg P_k \text{ ise} & 0 \end{array}\right\} = d^*(P_k)$$

olsun. O zaman her durumda

$$d^*(F_k) = 1.$$

Eğer $G \in \Delta$ ise, o zaman bir n için, G'nın her P_k değişkeni için, $1 \leqslant k \leqslant n$. $\Delta \cup \{F_1, \ldots, F_n\}$ tutarlı olduğundan bir d modeli vardır. Eğer $1 \leqslant k \leqslant n$ ise, o zaman

$$d(F_k) = 1 = d^*(F_k).$$

Bu durumda $d(P_k) = d^*(P_k)$, dolayısıyla Teorem 3 sayesinde $d(G) = d^*(G)$. Böylece d^*, Δ'nın modelidir. $\square$

Eğer $\Gamma \models F$ ise, o zaman Teorem 18'e göre $\Gamma \cup \{\neg F\}$'nin modeli yoktur, dolayısıyla Teorem 19 sayesinde Γ'nın sonlu bir Δ altkümesi için $\Delta \cup \{\neg F\}$'nin modeli yoktur, ve sonuç olarak $\Delta \models F$.

Topoloji bilenler için Teorem 19, *Tihonov Teoremi*'nin bir durumudur.

9. Tamlık

Sayfa 49'daki tanıma göre biçimsel bir kanıtta, her satır

1) ya bir totoloji,
2) ya da önceki satırların gerektirdiği bir formül,
3) ya da bir hipotezdir.

Eğer bir formül bir totolojiyse, bunu doğruluk tablosuyla gösterebiliriz. Eğer bir formül başka formüller tarafından gerektiriliyorsa, bunu da doğruluk tablolarıyla gösterebiliriz. Şimdi doğruluk tablolarını kullanmadan, biçimsel bir kanıtın hipotezlerini ve hipotez olmayan satırlarını ayırt edebilmek isteriz.

Bunu yapmak için *aksiyomları* ve *çıkarım kurallarını* meydana koyacağız. Bir **aksiyom,** seçkin bir totolojidir. Bir **çıkarım kuralı,** seçkin bir gerektirmedir. Aksiyomlar ve çıkarım kuralları, bir **biçimsel dizgeyi,** oluşturur.

Eğer

- $\mathscr{D}$ biçimsel bir dizge,
- Γ bir formüller kümesi, ve
- biçimsel bir kanıtın her satırı
    1) ya $\mathscr{D}$'nin bir aksiyomu,
    2) ya da $\mathscr{D}$'nin bir çıkarım kuralına göre önceki satırların gerektirdiği bir formül,
    3) ya da Γ'nın bir elemanı

ise, o zaman Γ, biçimsel kanıtın sonucunu gerektirir, ve ayrıca bu gerektirme, $\mathscr{D}$ dizgesinin **(biçimsel) bir teoremdir.**

Eğer her gerektirme $\mathscr{D}$ dizgesinin bir teoremi ise, bu dizgeye **tam** denir. Üç biçimsel dizgeyi tanımlayıp tamlığını kanıtlayacağız.

9.1. $\mathscr{D}_0$ biçimsel dizgesi

Aslında bir formülü sonlu sayıda formüllerin gerektirip gerektirmediğini öğrenmek için, doğruluk tablosu yönteminin kendisi biçimsel bir yöntemdir. O zaman en kapsamlı biçimsel dizgede

1) her totoloji bir aksiyomdur,
2) sonlu sayıda formüllerden gelen her gerektirme bir çıkarım kuralıdır.

Bu dizge $\mathscr{D}_0$ olsun. O zaman Teorem 19 sayesinde $\mathscr{D}_0$ tamdır.

9.2. $\mathscr{D}_1$ biçimsel dizgesi

$\mathscr{D}_1$ biçimsel dizgesinin aksiyomları iki şekildedir.

1. 1, bir aksiyomdur.
2. Her $\neg F \lor F$ formülü, bir aksiyomdur.

Çıkarım kuralları üç şekildedir.

Ekleme. Her F formülünden, her G formülü için, $G \lor F$ çıkar.

Bağlama. Herhangi F ve G formüllerinden $F \land G$ çıkar.

Yerine Koyma. Her K formülünden öyle bir K^* formülü çıkar ki Teorem 5'ten çıkan bir $F \sim G$ denkliği için, bundan Teorem 6 sayesinde çıkan bir $F' \sim G'$ denkliği için, F', K'nın bir altformülüdür, ve K'da F' altformülünün yerine (Teorem 7'deki gibi) G' konularak K^* çıkar.

$\mathscr{D}_1$ dizgesinin tamlığını göstermek için, her formülün denk **tikel-evetlemeli normal biçimi** (disjunctive normal form) olduğunu gözlemleyeceğiz. Bu biçim, bazı *tümel*-evetlemelerin tikel evetlemesidir. Bu tümel-evetlemeler, bazı *harfilerin* tümel-evetlemeleridir. Bir **harfi** (literal [1, s. 101]), ya bir önerme

P	0	1	0	1	0	1	0	1
Q	0	0	1	1	0	0	1	1
R	0	0	0	0	1	1	1	1
$P \vee Q \to R$	1	0	0	0	1	1	1	1
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	1	0	0	0	0	0	0	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	1	0	0	0
$P \wedge \neg Q \wedge R$	0	0	0	0	0	1	0	0
$\neg P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	1	0
$P \wedge Q \wedge R$	0	0	0	0	0	0	0	1

Şekil 21. $P \vee Q \to R$ formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi için doğruluk tabloları

değişkeni ya da değillemesidir. Tikel-evetlemeli normal biçiminin her tümel-evetlemesinde, aynı değişkenler geçer.

Örneğin $P \vee Q \to R$ formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi aşağıdaki gibidir:

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \\ \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R).$$

Bunu anlamak için, Şekil 21'e bakın. Şekil 15'teki gibi $P \vee Q \to R$ ve $(P \to R) \wedge (Q \to R)$ formüllerinin doğruluk tabloları birbiriyle aynı olduğundan formüllerin tikel-evetlemeli normal biçimleri birbiriyle aynıdır.

Şimdi F rastgele bir önerme formülü olsun, ve onun önerme değişkenleri P_1, …, P_n olsun. Üstelik d bir doğruluk göndermesi olsun. O zaman

$$(d(P_1), \dots, d(P_n))$$

listesi için, 2^n tane seçenek var. Bir m için, m ve sadece m tane seçenek için, $d(F) = 1$. O seçenekler,

$$(e_1^1, \dots, e_n^1), \qquad \dots, \qquad (e_1^m, \dots, e_n^m)$$

olsun. Örneğin $P_1 \vee P_2 \to P_3$ için seçenekler $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ listeleridir; bunlar Şekil 21'den okunabilir. Genelde

$$\left.\begin{array}{ll} \text{eğer } e_j^i = 0 \text{ ise} & \neg P_j, \\ \text{eğer } e_j^i = 1 \text{ ise} & P_j, \end{array}\right\} P_j^i \text{ olsun.}$$

Ondan sonra F^i formülü,

$$P_1^i \wedge \dots \wedge P_n^i$$

tümel-evetlemesi olsun. O zaman

$$F^1 \vee \dots \vee F^m$$

tikel-evetlemesi, F'nin **tikel-evetlemeli normal biçimidir.** Böylece F formülünün tikel-evetlemeli normal biçimi,

$$(P_1^1 \wedge \dots \wedge P_n^1) \vee \dots \vee (P_1^m \wedge \dots \wedge P_n^m)$$

formülüdür. Bu formülün F formülüne denk olduğu görünebilir. İki özel durum vardır:

$\boldsymbol{m = 0}$ ise F'nin tikel-evetlemeli normal biçimi 0 formülüdür.

$\boldsymbol{n = 0}$ ise, ya $F \sim 0$ ya da $F \sim 1$. Sırasıyla F'nin tikel-evetlemeli normal biçimi, ya 0 ya da 1'dir.

Şimdi aşağıdaki alıştırma kolaylıkla çözülebilir.

Alıştırma 19. Rastgele bir doğruluk tablosu için, doğruluk tablosu 0 olan bir formülü yazın.

Lemma 2. *Bir $\{F_1, \ldots, F_n\}$ formüller kümesi bir G formülünü gerektirir ancak ve ancak $G \vee (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n)$ formülü G formülüne denktir.*

Kanıt. **Alıştırma 20.** □

Teorem 20. *$\mathscr{D}_1$ biçimsel dizgesi tamdır.*

Kanıt. Sadece Yerine Koyma kuralını kullanarak her F formülünü tikel-evetlemeli normal F' biçimine getirebiliriz. Tüm adımlarımız, tersine çevrilebilir. Bu şekilde

- F' formülünün F'yi gerektirdiği ve
- F'nin F' formülünü gerektirdiği,

$\mathscr{D}_1$ dizgesinin bir teoremidir. Ayrıca F bir totolojiyse, tekrar sadece Yerine Koyma kuralını kullanarak F formülünün normal F' biçiminin 1'e denk olduğunu gösterebiliriz, ve adımlarımız tersine çevrilebilir. Bu şekilde her totolojinin bir totoloji olduğu, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin bir teoremidir.

Şimdi Γ kümesi, F formülünü gerektirsin. Tıkızlık Teoremine göre Γ kümesinin sonlu bir $\{G_1, \ldots, G_n\}$ altkümesi de F formülünü gerektirir. Bağlama ve Ekleme kuralları sayesinde, bu $\{G_1, \ldots, G_n\}$ kümesinin

$$F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$$

formülünü gerektirdiği, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin bir teoremidir. Lemma 2'ye göre F ve $F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$ formülleri, birbirine denktir; dolayısıyla, bu formüllerin aynı tikel-evetlemeli normal F' biçimi vardır. Gösterdiğimiz gibi $F \vee (G_1 \wedge \cdots \wedge G_n)$ formülünün F' formülünü gerektirdiği, ve F' formülünün F'yi gerektirdiği, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin teoremidir. O zaman Γ kümesinin F'yi gerektirdiği, $\mathscr{D}_1$ dizgesinin teoremidir. □

9.3. $\mathscr{D}_2$ biçimsel dizgesi

Bu aşamada yeni bir simge yararlı olacak. Sayfa 42'deki gibi, eğer Γ formüller kümesi F formülünü gerektirirse,

$$\Gamma \vDash F$$

ifadesini yazacağız. Bu $\vDash$ simgesine **turnike** [turnstile] denir. Teorem 19'a göre $\Gamma \vDash F$ ise, o zaman Γ kümesinin sonlu bir Γ_0 altkümesi için $\Gamma_0 \vDash F$. Eğer bir $\Gamma \vDash F$ gerektirmesi, $\mathscr{D}$ biçimsel dizgesinin bir teoremiyse,

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{D}} F$$

ifadesini yazacağız. Bu $\vdash$ simgesi de, bir turnikedir. İstersek

- $\vDash$ simgesine **yorumsal** [semantic] turnike,
- $\vdash$ simgesine **dizimsel** [syntactic] turnike,

diyebiliriz. Ancak adlar önemli değil. Sayfa 50'deki Teorem 17'ye göre

$$\Gamma \vdash_{\mathscr{D}} F \text{ ise } \Gamma \vDash F.$$

Ayrıca $\mathscr{D}$ dizgesi tamdır ancak ve ancak

$$\Gamma \vDash F \text{ ise } \Gamma \vdash_{\mathscr{D}} F.$$

Tam biçimsel bir dizge, $\mathscr{D}_1$ dizgesinden daha basit olabilir. İlk olarak, bir formülün tikel-evetlemeli normal biçimi, sadece $\vee$, $\wedge$, $\neg$, 0, ve 1 bağlayıcılarını kullanır. Ayrıca

$$0 \sim \neg 1, \qquad 1 \sim \neg P_1 \vee P_1, \qquad F \wedge G \sim \neg(\neg F \wedge \neg G).$$

Öyleyse her formül, sadece $\vee$ ile $\neg$ bağlayıcılarının kullanıldığı bir formüle denktir. $\mathscr{D}_2$ adlı biçimsel dizge,* sadece bu bağlayıcıları kullanacak. Şimdi $\Gamma \vdash_{\mathscr{D}_2} F$ ifadesinin yerine

$$\Gamma \vdash_2 F$$

*Bu dizgeyi Shoenfield'den [10] aldım, ama ilk kaynağı Russell ile Whitehead'dir [13].

ifadesini yazalım. $\mathscr{D}_2$ dizgesinin her aksiyomu $\neg F \vee F$ biçimindedir:

$$\vdash_2 \neg F \vee F.$$

$\mathscr{D}_2$ dizgesinin çıkarım kuralları, aşağıdaki şekillerdedir.

Ekleme. Tüm F ve G formülleri için, F formülünden $G \vee F$ çıkar:

$$F \vdash_2 G \vee F.$$

Daralma. $F \vee F$ formülünden F çıkar:

$$F \vee F \vdash_2 F.$$

Birleşme. $F \vee (G \vee H)$ formülünden $(F \vee G) \vee H$ çıkar:

$$F \vee (G \vee H) \vdash_2 (F \vee G) \vee H.$$

Kesme. $F \vee G$ ve $\neg F \vee H$ formüllerinden $G \vee H$ çıkar:

$$F \vee G,\ \neg F \vee H \vdash_2 G \vee H.$$

Lemma 3 (Değişme)**.** *$\Gamma \vdash_2 F \vee G$ ise $\Gamma \vdash_2 G \vee F$.*

Kanıt. Eğer $\Gamma \vdash_2 F \vee G$ ise, o zaman $\vdash_2 \neg F \vee F$ sayesinde Kesme kuralıyla $\Gamma \vdash_2 G \vee F$. □

Sayfa 5'ten $F \vee G \vee H$'nin $F \vee (G \vee H)$ dediğini hatırlayın, onun için

$$F_1 \vee \cdots \vee F_n \text{ demek } F_1 \vee (F_2 \vee \cdots (F_{n-1} \vee F_n) \cdots).$$

Lemma 4 (Genelleştirilmiş Ekleme, Daralma & Değişme)**.** *Bir n için $F_1, \ldots, F_n$, formüller olsun. Bir m için, her i için, $1 \leqslant i \leqslant m$ ise $1 \leqslant k_i \leqslant n$ koşulunu sağlayan k_i seçilsin. O zaman*

$$\Gamma \vdash_2 F_{k_1} \vee \cdots \vee F_{k_m} \ \textit{ise}\ \Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n.$$

Kanıt. Kanıtımız, m üzerine tümevarım yöntemini kullanacaktır. Aslında üç durum vardır.

• $\boldsymbol{m = 1}$ **durumu.** $1 \leqslant k \leqslant m$ ve $\Gamma \vdash_2 F_k$ varsayıyoruz. O zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 (F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n) \vee F_k, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_k \vee F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Lemma 3]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_{k-1} \vee F_k \vee F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Ekleme]}\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_k \vee F_{k+1} \vee \cdots \vee F_n, && \text{[Ekleme]}
\end{aligned}$$

yani $\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n$.

• $\boldsymbol{m = 2}$ **durumu.** $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ ve

$$\Gamma \vdash_2 F_i \vee F_j$$

varsayıyoruz. Eğer $i = j$ ise, o zaman Daralmayla $\Gamma \vdash_2 F_i$, ve $m = 1$ durumundan $\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n$. Eğer $j < i$ ise, o zaman Değişmeyle $\Gamma \vdash_2 F_j \vee F_i$. Dolayısıyla $i < j$ varsayılabilir. O halde $n \geqslant 2$. Şimdi n üzerine tümevarımı kullanacağız.

1. Eğer $n = 2$ ise, ispatlanacak hiçbir şey yoktur.
2. Şimdi $k \geqslant 2$ olsun, ve $n = k$ durumunda (ve $m = 2$ durumunda) teoremin ispatlandığını varsayalım. O zaman $n = k + 1$ durumunda ispatlayacağız.
   – Eğer $i = 1$ ve $j = 2$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1 \vee F_2, && \text{[Ekleme]}\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1) \vee F_2, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_2 \vee (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && \text{[Lemma 3]}\\
&\Gamma \vdash_2 (F_2 \vee F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && \text{[Birleşme]}\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_{k+1}. && \text{[Lemma 3]}
\end{aligned}$$

– Eğer $i = 1$ ve $j > 2$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}, && [n = k \text{ durumu}]\\
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && [\text{Lemma 3}]\\
&\Gamma \vdash_2 F_2 \vee (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1, && [\text{Ekleme}]\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1) \vee F_2, && [\text{Lemma 3}]\\
&\Gamma \vdash_2 (F_3 \vee \cdots \vee F_{k+1}) \vee F_1 \vee F_2, && [\text{Birleşme}]\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_{k+1}. && [\text{Lemma 3}]
\end{aligned}$$

– Eğer $i > 1$ ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 F_2 \vee \cdots \vee F_{k+1}, && [n = k \text{ durumu}]\\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_{k+1}. && [\text{Ekleme}]
\end{aligned}$$

Böylece, tümevarım ile, $m = 2$ durumunda teorem ispatlanmıştır.

• $\boldsymbol{m > 2}$ **durumu.** $\ell \geqslant 2$ olsun, ve $m = \ell$ durumunda teoremin ispatlandığını varsayalım. $m = \ell + 1$ durumunda ispatlayacağız. O zaman

$$\Gamma \vdash_2 F_{k_1} \vee \cdots \vee F_{k_{\ell+1}}$$

varsayıyoruz. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 (F_{k_1} \vee F_{k_2}) \vee \cdots \vee F_{k_{\ell+1}}, && [\text{Birleşme}]\\
&\Gamma \vdash_2 (F_{k_1} \vee F_{k_2}) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && [m = \ell \text{ d.}]\\
&\Gamma \vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1} \vee F_{k_2}, && [\text{Lemma 3}]\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}) \vee F_{k_2}, && [\text{Birleşme}]\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && [m = 2 \text{ d.}]\\
&\Gamma \vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}, && [\text{Lemma 3}]\\
&\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_{k_1}, && [\text{Birleşme}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma \vdash_2 ((F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n) \\
&\qquad \vee (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && [m = 2 \text{ d.}] \\
&\Gamma \vdash_2 (F_1 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1 \vee \cdots \vee F_n, && [\text{Daralma}] \\
&\Gamma \vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. && [\text{Daralma}]
\end{aligned}
$$

Tümevarımdan tüm durumda teorem kanıtlanmıştır. □

Lemma 5. *n bir sayı olsun, ve her k için, $1 \leqslant k \leqslant n$ ise F_k bir harfi olsun. Eğer*

$$\vDash F_1 \vee \cdots \vee F_n$$

ise, o zaman bazı i ve j için F_i, $\neg F_j$ formülüyle aynıdır.

Kanıt. **Alıştırma 21.** □

Lemma 6. *1'den büyük olan her n için, eğer $\vDash F_1 \vee \cdots \vee F_n$ ise, o zaman*

$$\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n.$$

Kanıt. $n \geqslant 2$ ve $\vDash F_1 \vee \cdots \vee F_n$ varsayılıyor. Tümevarım kullanacağız.

1. En basit durumda, her F_k bir harfidir. Bu durumda, Lemma 5'e göre, bir i ve j için, F_i ve $\neg F_j$ birbiriyle aynıdır. O zaman

$$
\begin{aligned}
&\vdash_2 F_i \vee F_j, && [\text{aksiyom}] \\
&\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. && [\text{Lemma 4}]
\end{aligned}
$$

2. Şimdi, bir k için, F_k formülü harfi olmasın. Lemma 4 sayesinde, $k = 1$ varsayabiliriz. Üç tane durum var. Her bir durumda, tümevarım hipotezi olarak, daha basit durumların ispatlandığını varsayıyoruz.

***F_1, $\neg\neg G$* biçiminde ise,** o zaman $\models G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$, dolayısıyla

$$\begin{array}{ll}
\vdash_2 G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, & \text{[hipotez]} \\
\vdash_2 F_1 \vee \neg G, & \text{[aksiyom]} \\
\vdash_2 \neg G \vee F_1, & \text{[Lemma 3]} \\
\vdash_2 (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1, & \text{[Kesme]} \\
\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. & \text{[Lemma 3]}
\end{array}$$

***F_1, $\neg(G \vee H)$* biçiminde ise,** o zaman $\models \neg G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$ ve $\models \neg H \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$, dolayısıyla

$$\begin{array}{ll}
\vdash_2 \neg G \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, & \text{[hipotez]} \\
\vdash_2 F_1 \vee G \vee H, & \text{[aksiyom]} \\
\vdash_2 G \vee H \vee F_1, & \text{[Lemma 4]} \\
\vdash_2 (H \vee F_1) \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, & \text{[Kesme]} \\
\vdash_2 (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee H \vee F_1, & \text{[Lemma 3]} \\
\vdash_2 H \vee (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1, & \text{[Lemma 4]} \\
\vdash_2 \neg H \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, & \text{[hipotez]} \\
\vdash_2 ((F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1) \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, & \text{[Kesme]} \\
\vdash_2 (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee (F_2 \vee \cdots \vee F_n) \vee F_1, & \text{[Lemma 3]} \\
\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. & \text{[Lemma 4]}
\end{array}$$

***F_1, $G \vee H$* biçiminde ise,** o zaman $\models G \vee H \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n$, dolayısıyla

$$\begin{array}{ll}
\vdash_2 G \vee H \vee F_2 \vee \cdots \vee F_n, & \text{[hipotez]} \\
\vdash_2 F_2 \vee \cdots \vee F_n \vee F_1, & \text{[Lemma 4]} \\
\vdash_2 F_1 \vee \cdots \vee F_n. & \text{[Lemma 4]}
\end{array}$$ □

Lemma 7 (Totoloji)**.** *$\models F$ ise $\vdash_2 F$.*

Kanıt. $\vDash F$ ise, o zaman

$$\vDash F \vee F,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\vdash_2 F \vee F, && \text{[Lemma 6]} \\ &\vdash_2 F. && \text{[Daralma]} \end{aligned}$$ □

Lemma 8 (Ayırma)**.** *$\Gamma \vdash_2 F$ ile $\Gamma \vdash_2 \neg F \vee G$ ise $\Gamma \vdash_2 G$.*

Kanıt. $\Gamma \vdash_2 F$ ile $\Gamma \vdash_2 \neg F \vee G$ varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \Gamma &\vdash_2 G \vee F, && \text{[Ekleme]} \\ \Gamma &\vdash_2 F \vee G, && \text{[Lemma 3]} \\ \Gamma &\vdash_2 G \vee G, && \text{[Kesme]} \\ \Gamma &\vdash_2 G. && \text{[Daralma]} \end{aligned}$$ □

Teorem 21 ($\mathscr{D}_2$ dizgesinin tamlığı)**.** *$\Gamma \vDash F$ ise $\Gamma \vdash_2 F$.*

Kanıt. $\Gamma \vDash F$ varsayalım. Teorem 19 sayesinde Γ kümesinin bir $\{G_1 \dots, G_n\}$ altkümesi için $\{G_1 \dots, G_n\} \vDash F$. O zaman

$$\vDash \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\vdash_2 \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \text{[Lemma 7]} \\ \Gamma &\vdash_2 \neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \\ \Gamma &\vdash_2 G_1, && \\ \Gamma &\vdash_2 \neg G_2 \vee \dots \vee \neg G_n \vee F, && \text{[Lemma 8]} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, && \\ \Gamma &\vdash_2 F. && \end{aligned}$$ □

Kaynakça

[1] Stanley N. Burris. *Logic for Mathematics and Computer Science*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1998.

[2] Alonzo Church. *Introduction to mathematical logic. Vol. I*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[3] A. Kadir Çüçen. *Mantık*. Sentez, Ankara, 2013. Gözden geçirilmiş 8. baskı.

[4] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü*. Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[5] Teo Grünberg and Adnan Onart. *Mantık Terimleri Sözlüğü*. Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[6] Ali Nesin. *Önermeler Mantığı*. Bilgi Üniversitesi Yayınları, Ekim 2001.

[7] Reviel Netz. *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, volume 51 of *Ideas in Context*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. A study in cognitive history.

[8] Öklid. *Öğelerin 13 Kitabından Birinci Kitap*. Matematik Bölümü, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul, 4 edition, Eylül 2014. Öklid'in Yunanca metni ve Özer Öztürk & David Pierce'in çevirdiği Türkçesi.

[9] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's* Elements. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow. Reprint of the 1970 edition. With a foreword by Ian Mueller.

[10] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical logic.* Association for Symbolic Logic, Urbana, IL, 2001. reprint of the 1973 second printing.

[11] Dirk J. Struik. *A Concise History of Modern Mathematics.* Dover, New York, fourth revised edition, 1987.

[12] Dirk J. Struik. *Kısa Matematik Tarihi.* Sarmal Yayınevi, İstanbul, 1996. Türkçesi: Yıldız Silier.

[13] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia Mathematica*, volume I. University Press, Cambridge, 1910. Reprinted by Merchant Books, 2009.

Dizin