Analitik Geometri

David Pierce
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce
polytropy.com

13 Ocak 2020

1 Giriş

Analitik Geometri, cebirsel yöntemleri kullanan geometridir. Bu yöntemler, bir *orantılar* kuramına bağlıdır. Bu kuramda

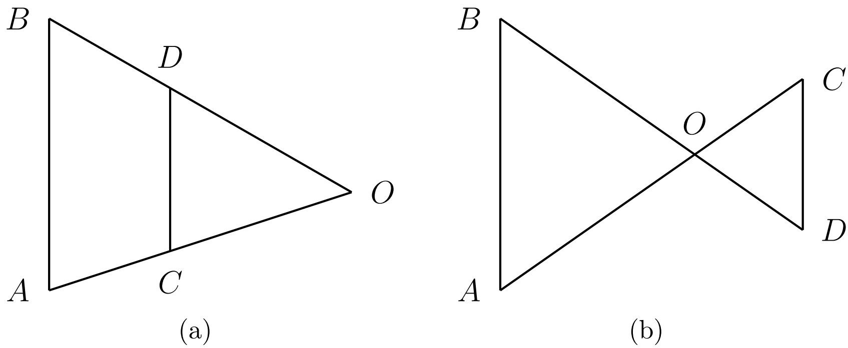
1) orantılılık bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır;

2) *Thales Teoremi* doğrudur.

Bu notlarda

- orantılılık kuramını, *Desargues Teoremi*'nden;
- Desargues Teoremi'ni, *Pappus Teoremi*'nden;
- Pappus Teoremi'ni, Öklid'in *Öğeler*'inin I. kitabından

elde edeceğiz.



Şekil 1: Thales Teoremi

2 Thales Teoremi

Geometrik tanımlardan birine göre bir **elips,** iki verilen **odak noktasından** uzaklıklarının toplamı aynı olan noktaların bir yeridir. Analitik geometride, bir a ve bir b için, elipsi tanımlayan koşul iki değişkeni olan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cebirsel denklemi tarafından ifade edilebilir.

Cebirsel bir denklemde değişkenlerin ve sabitlerin değerleri, gerçel sayıların oluşturduğu $\mathbb{R}$ gibi bir *cisimden* gelir. Bir cisimde iki elemanın *toplamı* ve *çarpımı* vardır.

Öklid'in *Öğeler*'inin birinci kitabında toplamanın geometrik anlamı vardır, ama çarpma kavramı yoktur [6, 7, 8].

1637 yılında yayınlanmış olan *La Géometrie* adlı kitabında Descartes, gerçel sayıların çarpmasına geometrik bir anlamı verir [4, 5]. Bunun için **Thales Teoremi'ni** kullanır [14]. Bu teoreme göre eğer Şekil 1'deki gibi bir OAB üçgeninin OA

kenarında C ve OB kenarında D oturursa, o zaman

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OC} :: \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OD}.$$

Burada

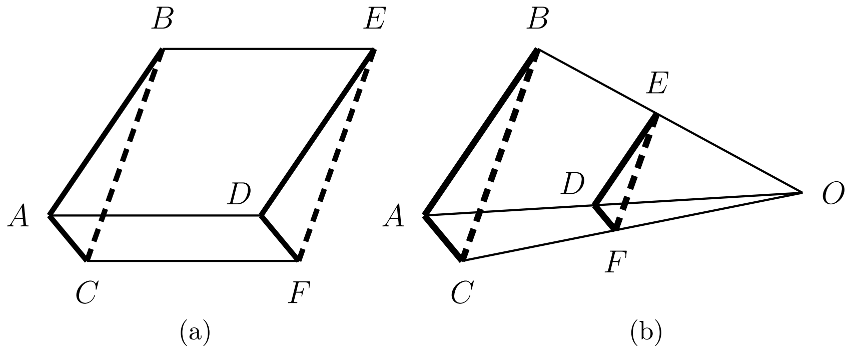
- $\overrightarrow{OA}$, bir *yönlü doğru parçasıdır*;
- $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OC}$, bir *orandır*;
- $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OC} :: \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OD}$, bir *orantıdır*;
- $::$ işareti, orantılılık bağıntısını (yani oranlar aynılığını) gösterir.

Thales Teoremi, *Öğeler*'in altıncı kitabının ikinci önermesidir. Önermeyi göstermek için Öklid, beşinci kitapta bulunan orantılar kuramını kullanır. Bu kuram, uzunlukların **Arşimet özelliğini** varsayır. Bu özelliğe göre iki uzunluğun daha küçüğünün bir katı, daha büyüğünden daha büyüktür.

Pozitif gerçel sayıların aynı özelliği vardır. İki pozitif gerçl sayının bölümü vardır, ve bu bölüm, pozitif gerçel bir sayıdır. Öklid'de iki uzunluğun oranı vardır, ve bu oran, pozitif gerçel bir sayı olarak anlaşılabilir.

Aslında analitik geometri yapmak için, Arşimet özelliğine ihtiyacımız yoktur. Ayrıca oranlar negatif olabilir. Orantıların *tanımı* olarak Thales Teoremi'ni varsayabiliriz. Bu durumda orantılılığın geçişli olduğunu göstermek zorundayız. Bunun için, Hilbert 1899 yılında gösterdiği gibi

- 4. yüzyılında yayınlanmış olan *Pappus Teoremi* [12, 13],
- 1648 yılında yayınlanmış olan *Desargues Teoremi* [3]



Şekil 2: Desargues Teoremi

yeter [10]. Hessenberg, Desargues Teoremi'ni Pappus Teoremi'nden 1905 yılında elde eder [9]. Artin, analitik geometri için Pappus ve Desargues Teoremleri'nin yettiğini Hilbert'inkinden (ve bizimkinden) başka bir şekilde 1957 yılında gösterir [1]. (Hilbert ve Hessenberg'de Pappus Teoremi'ne *Pascal Teoremi* denir.)

3 Desargues Teoremi: Bildirme

Üçtane AD, BE, ve CF doğrusu Şekil 2'deki gibi

(a) ya birbirine paralel olsun,

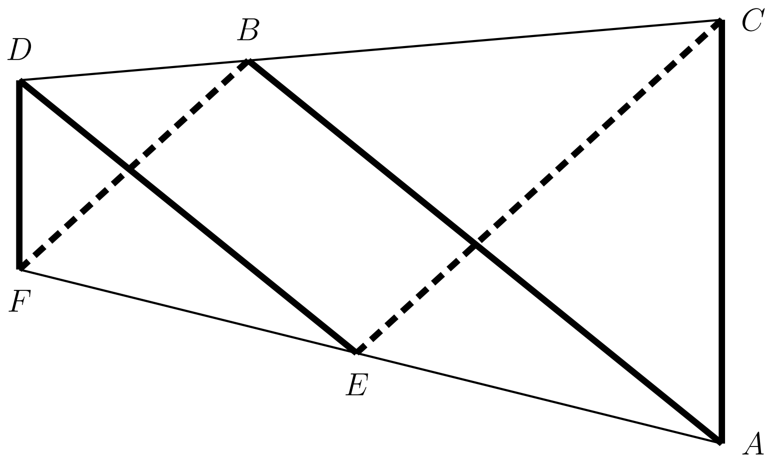
(b) ya da O noktasında kesişsin.

Ayrıca

$$AB \parallel DE, \qquad AC \parallel DF$$

olsun. **Desargues Teoremi'ne** göre

$$BC \parallel EF.$$



Şekil 3: Pappus Teoremi

Bu teoremin birinci durumunu elde etmek için, Öklid'in *Öğeler*'inin birinci kitabından Önermeler 34 ve 30, birinci ortak kavram, ve Önerme 33 yeter.

4 Pappus Teoremi: Bildirme ve Gösterme

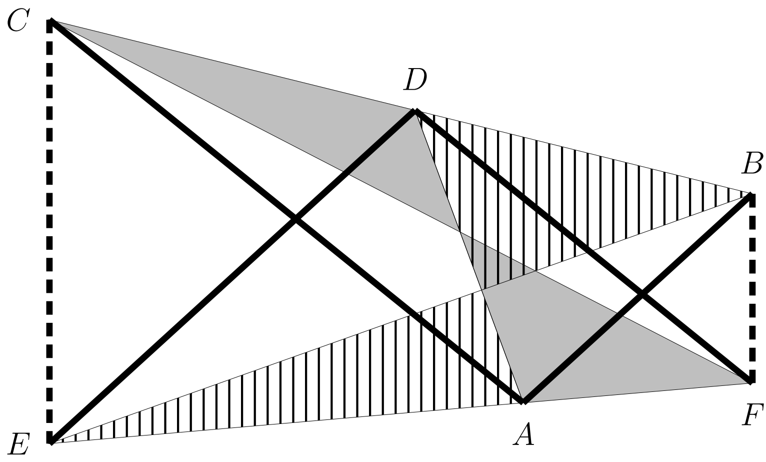
Desargues Teoremi'nin ikinci durumunu göstermek için, Şekil 3 veya 4'teki gibi A noktası EF'de, D noktası BC'de olsun, ve tekrar

$$AB \parallel DE, \qquad AC \parallel DF$$

olsun. **Pappus Teoremi'ne** göre

$$BF \parallel CE.$$

Bunu kanıtlamak için Şekil 4'teki gibi AD, BE, ve CF çizilsin.



Şekil 4: Pappus Teoremi'nin düzenlemesi

Öklid'in Önerme 37'sine göre $AB \parallel DE$ olduğundan

$$ABD = ABE.$$

İkinci ortak kavrama göre

$$FBDA = AFB + ABD = AFB + ABE = FBE.$$

Benzer şekilde $FD \parallel AC$ olduğundan

$$FDA = FDC,$$
$$FBDA = FBD + FDA = FBD + FDC = FBC,$$

dolayısıyla

$$FBE = FBC.$$

Önerme 39'a göre $BF \parallel CE$. Pappus'un Teoremi kanıtlanmıştır.

Pappus'un Teoremi'ne göre iki doğrunun birinden diğerine bir altıgenın her kenarı geçerse, ve iki durumda altıgenin karşıt kenarları birbirine paralel ise, o zaman üçüncü durumda da paralellerdir. Şekiller 3 ve 4'te altıgen $ABFDEC$ olur.

5 Desargues Teoremi: Gösterme

Şimdi Şekil 5'teki gibi AD, BE, ve CF'nin ortak noktası O olsun; ayrıca $AB \parallel DE$ ve $AC \parallel DF$ olsun. İki durum vardır.

(a) Eğer $BACO$ bir paralelkenar değilse, $OB \nparallel AC$ varsayılabilir. Bu durumda $LM \parallel OB$ ve $D \in LM$ olsun. Pappus Teoremi ile

- $ONDLAB$ altıgeninde $ON \parallel AL$,
- $ONMLCB$ altıgeninde $BC \parallel MN$,
- $ONMDFE$ altıgeninde $EF \parallel MN$.

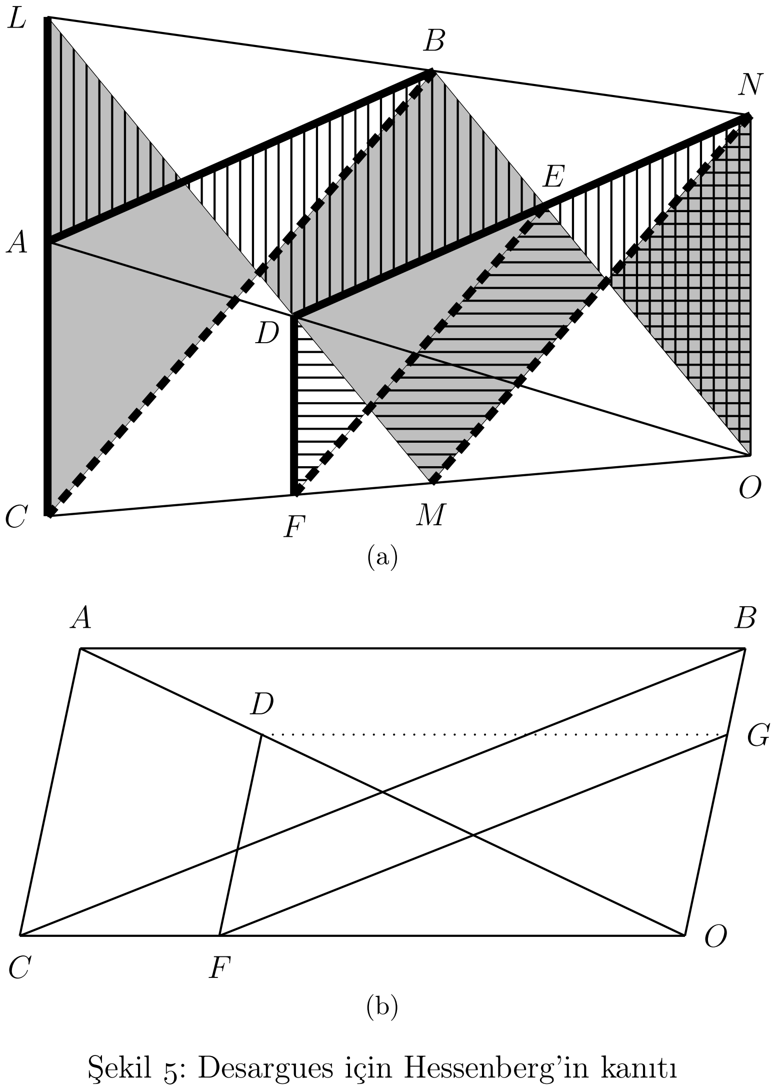
Paralellik geçişli olduğundan $BC \parallel EF$.

(b) Eğer $BACO$ bir paralelkenar ise, o zaman $ABCO$ bir paralelkenar değildir. Bu durumda OB'de bir G için $FG \parallel CB$. İlk durumdan $DG \parallel AB$, dolayısıyla G ve E noktası aynıdır.

Desargues Teoremi'nin ikinci durumu kanıtlanmıştır.

6 Vektörler Grubu

Öklid'de doğru parçaların eşitliği bir denklik bağıntısıdır. Özellikle birinci ortak kavrama göre eşitlik geçişlidir. Eşitliğe göre bir doğru parçasının denklik sınıfı, onun **uzunluğu** olarak anlaşılabilir.



(a)

(b)

Şekil 5: Desargues için Hessenberg'in kanıtı

Eğer bir doğru kendisine paralel ise, o zaman Önerme 30'a göre paralellik de bir denklik bağıntısıdır.

Desargues Teoremi'nin ilk durumu sayesinde yönlü doğru parçalarının, aşağıdaki koşulları sağlayan *eşitliği* vardır, ve bu eşitlik, bir denklik bağıntısıdır.

1. Herhangi $ABDC$ paralelkenari için o zaman
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$
2. Herhangi $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ve C noktası için, bir ve tek bir D noktası için,
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Eşitliğe göre yönlü bir doğru parçasının denklik sınıfı, bir **vektördür.**

Bir vektör daha vardır. $\overrightarrow{AA}$'nın yönlü doğru parçası olmadığı halde her durumda
$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$$
olsun, ve her $\overrightarrow{AA}$'nın temsil ettiği vektör,
$$\mathbf{0}$$
olsun. Ayrıca tanıma göre
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$
$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$
olsun. Bu tanımlar, vektörlere geçer, ve herhangi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ve $\boldsymbol{c}$ vektörü için
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0} = \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}.$$

Böylece vektörler V kümesini oluşturduğunda $(V, +, -, \mathbf{0})$ bir **abelyan gruptur.**

7 Oranlar Cismi

Desargues Teoremi'nin ikinci durumu sayesinde, iki paralel yönlü doğru parçasının **oranı** vardır, ve ayrıca onların temsil ettiği vektörlerin aynı oranı vardır. Bir oran, bir denklik sınıfıdır, ve aşağıdaki koşullar sağlanır.

1. Thales Teoremi doğrudur.
2. Herhangi $\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}$ oranı ve $\overrightarrow{OC}$ yönlü doğru parçası için, bir ve tek bir D noktası için,
$$\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB} :: \overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD}.$$

Bir oran daha vardır.

$$\overrightarrow{OO} : \overrightarrow{OA} :: \overrightarrow{OO} : \overrightarrow{OB}$$

olsun, ve ortak oran 0 olsun. Şimdi tanıma göre

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a} : \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) : \boldsymbol{c}, \\
-\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}), \\
(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} : \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} : \boldsymbol{c}, \\
\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b})^{-1}, \\
\boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} = 1
\end{gathered}$$

olsun. Pappus Teoremi sayesinde

$$(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}) :: (\boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}) \cdot (\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}).$$

Böylece oranlar K kümesini oluşturduğunda

- $(K, +, -, 0)$ bir abelyan gruptur,
- $(K \smallsetminus \{0\}, \,\cdot\,, {}^{-1}, 1)$ bir abelyan gruptur,
- K'de herhangi a, b, ve c oranı için

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Bundan dolayı $(K, \,\cdot\,, +, -, 1, 0)$ bir **cisimdir.**

8 Koordinatlar

Şimdi tanıma göre

$$(\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$$

olsun. O zaman herhangi a ve b oranı ve herhangi $\boldsymbol{c}$ ve $\boldsymbol{d}$ vektörü için

$$\begin{aligned} a \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) &= a \cdot \boldsymbol{c} + a \cdot \boldsymbol{d}, \\ (a + b) \cdot \boldsymbol{c} &= a \cdot \boldsymbol{c} + b \cdot \boldsymbol{c}, \\ a \cdot (b \cdot \boldsymbol{c}) &= (a \cdot b) \cdot \boldsymbol{c}, \\ 1 \cdot \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

Böylece vektörler grubu, oranlar cismi altında bir **vektör uzayıdır.** Ayrıca OAB bir üçgen olduğunda herhangi P noktası için, girdileri K'de olan bir ve tek bir sıralı ikilisi

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$$

denklemini sağlar. O girdiler, P'nin *Descartes koordinatları* veya **kartezyan koordinatlarıdır.**

9 Doğrular

Her CD doğrusu için, K'nin bir elemanının

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD}$$

denklemini sağlaması, P noktasının CD'de olmasının gerek ve yeter bir koşuldur. Şimdi

$$\overrightarrow{OC} = c_1 \cdot \overrightarrow{OA} + c_2 \cdot \overrightarrow{OB}, \qquad \overrightarrow{OD} = d_1 \cdot \overrightarrow{OA} + d_2 \cdot \overrightarrow{OB}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD} \\
&\quad = \overrightarrow{OC} + t \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}) \\
&\quad = (1-t) \cdot \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{OD} \\
&\quad = (1-t) \cdot (c_1 \cdot \overrightarrow{OA} + c_2 \cdot \overrightarrow{OB}) + t \cdot (d_1 \cdot \overrightarrow{OA} + d_2 \cdot \overrightarrow{OB}) \\
&\quad = \big((1-t)c_1 + td_1\big) \cdot \overrightarrow{OA} + \big((1-t)c_2 + td_2\big) \cdot \overrightarrow{OB} \\
&\quad = \big(c_1 + t(d_1 - c_1)\big) \cdot \overrightarrow{OA} + \big(c_2 + t(d_2 - c_2)\big) \cdot \overrightarrow{OB}.
\end{aligned}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow x - c_1 = t(d_1 - c_1) \land y - c_2 = t(d_2 - c_2),
\end{aligned}$$

dolayısıyla bir P noktasının kartezyan koordinatlarının

$$(d_2 - c_2)(x - c_1) = (d_1 - c_1)(y - c_2) \tag{$*$}$$

denklemini sağlaması, P'nin CD'de olmasının gerek ve yeter bir koşuldur. O denklem

$$(d_2 - c_2)x + (c_1 - d_1)y + c_2 d_1 - c_1 d_2 = 0$$

biçiminde yazılabilir.

Katsayıları K'den gelen, a ve b'nin en az birinin 0'dan farklı olduğu herhangi

$$ax + by + c = 0 \tag{$\dagger$}$$

denkleminin bir (c_1, c_2) çözümü vardır. Bu durumda denklem

$$a(x - c_1) = -b(y - c_2)$$

biçiminde yazılabilir. O zaman

$$d_1 = -b + c_1, \qquad d_2 = a + c_2$$

olmak üzere (d_1, d_2) de denklemin bir çözümüdür. Bu durumda denklem, $(*)$ biçiminde yazılabilir.

Bir K cismi verilirse, a ve b'nin en az birinin 0'dan farklı olduğu $(\dagger)$ denklemleri, K^2 kartezyan çarpımının doğrularını tanımlasın. O zaman Pappus ve Desargues Teoremleri doğrudur, ve yukarıdaki gibi elde edilen oranlar, K cismini oluşturur.

Kaynaklar

[1] E. Artin. *Geometric Algebra.* Interscience, New York, 1957.

[2] Girard Desargues. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra*, volume 1. Leiber, Paris, 1864. `gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k993793`, accessed January 8, 2020.

[3] Girard Desargues. Desargues on perspective triangles. In David Eugene Smith, editor, *A Source Book in Mathematics*, 2 vols, pages 307–10. Dover Publications, New York, 1959. Translated by Lao G. Simons from [2], pp. 413–5, 430–3.

[4] René Descartes. *The Geometry of René Descartes.* Dover Publications, New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[5] René Descartes. *La Géométrie.* Jacques Gabay, Sceaux, France, 1991. Reprint of Hermann edition of 1886.

[6] Euclid. *The Bones: A handy where-to-find-it pocket reference companion to Euclid's* Elements. Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002. Conceived, designed, and edited by Dana Densmore.

[7] Euclid. *Euclid's Elements.* Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002. All thirteen books complete in one volume. The Thomas L. Heath translation, edited by Dana Densmore.

[8] Euclid. *Öklid'in* Öğeler*'inin 13 Kitabından Birinci Kitap.* Mathematics Department, Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, 5th edition, September 2015. The first of the 13 books of Euclid's Elements. Greek text, with Turkish version by Özer Öztürk & David Pierce, and exercises by Pierce.

[9] Gerhard Hessenberg. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Math. Ann.*, 61(2):161–172, 1905.

[10] David Hilbert. *The Foundations of Geometry.* Authorized translation by E. J. Townsend. Reprint edition. The Open Court Publishing Co., La Salle, Ill., 1959. Based on lectures 1898–99. Translation copyrighted 1902. Project Gutenberg edition released December 23, 2005 (`www.gutenberg.net`).

[11] Pappus of Alexandria. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.

[12] Pappus of Alexandria. *Book 7 of the Collection. Part 1. Introduction, Text, and Translation. Part 2. Commentary, Index, and Figures.* Springer Science+Business Media, New York, 1986. Edited With Translation and Commentary by Alexander Jones.

[13] Pappus of Alexandria. Öklid'in Porizmalar'ı için Derleme'nin yedinci kitabı'nın 38 lemmasından ilk 19 lemması. `mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/Geometriler/`, March 2019. The First 19 of the 38 Lemmas for Euclid's Porisms in the Seventh Book of the Collection. Turkish translation from [11] by David Pierce.

[14] Dimitris Patsopoulos and Tasos Patronis. The theorem of Thales: A study of the naming of theorems in school geometry textbooks. *The International Journal for the History of Mathematics Education*, 1(1), 2006. `www.comap.com/historyjournal/index.html`, accessed September 2016.