Modeller Kuramına Giriş

David Pierce

15 Şubat 2012
Redaksiyon yapılmış 9 Şubat 2015

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Önsöz

Bildiğim ve kullandığım modeller kuramı kitapları ilk yayım tarihlerine göre aşağıda sıralanmıştır.

1969 Bell & Slomson *Models and Ultraproducts: An Introduction*
1973 Chang & Keisler *Model Theory*
1985 Poizat *Cours de théorie des modèles*
1993 Hodges *Model Theory*
1995 Rothmaler *Introduction to Model Theory*
2002 Marker *Model Theory: An introduction*
2003 Marcja & Toffalori *A Guide to Classical and Modern Model Theory*
2012 Tent & Ziegler *A Course in Model Theory*

Türkçe ifadelerde yardım ettiği için Ayşe Berkman'a teşekkür ederim. Ali Nesin'in *Analiz IV* kitabını da matematiksel Türkçe örneği olarak kullandım. Bazı terimler, Grünberg ile Onart ve Demirtaş tarafından yazılmış kitaplardan alınmıştır.

İçindekiler

1 Yapılar, Teoriler, ve Modeller

Modeller kuramı, *teorilerin modelleri* olarak *yapıların* araştırılmasıdır. Bu tanımda açıklanacak üç terim var, yani: (1) *yapı,* (2) *teori,* (3) *model.*

1.1 Yapılar

Öncelikle, bazı yapı örnekeri ile başlayalım:

1) $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ sıralanmış cismi;

2) $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ cismi;

3) bir $(G, \cdot, {}^{-1}, 1)$ grubu;

4) $(\mathbb{Q}, <)$ doğrusal sıralanmış kümesi;

5) $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ değişmeli grubu;

6) $(\mathbb{N}, 1, x \mapsto x+1)$ doğal sayılar yapısı (bu kitapta $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olacak);

7) Ω bir kümeyse, $(\mathscr{P}(\Omega), \cup, \cap, \smallsetminus, \varnothing)$ Boole cebiri.

Yapı, bazı *işlemleri, bağıntıları,* ve *elemanları* ile donatılmış bir kümedir. Mesela, $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ yapısında,

1) $+$, $-$, ve $\cdot$, $\mathbb{R}$ kümesinin işlemleridir;
2) $<$, $\mathbb{R}$ kümesinin bir bağıntısıdır;
3) 0 ve 1, $\mathbb{R}$ kümesinin elemanlarıdır.

Bir A kümesinden,

$$A, \qquad A \times A, \qquad A \times A \times A, \qquad \dots$$

dizisini oluştururuz, yani A^1, A^2, A^3, ... Bu kümelerin rastgele elemanları sırasıyla

$$a_0, \qquad (a_0, a_1), \qquad (a_0, a_1, a_2), \qquad \dots$$

olarak yazılır. (Bu kitapta indisler $\{0, 1, 2, \dots\}$ kümesinden alınır; bu küme ω olarak yazılır.)

1. **A kümesinin bir bağıntısı,** $\mathbb{N}$ kümesinden bir n için, A^n kuvvetinin bir altkümesidir. Bu altküme, A kümesinin **n-konumlu** bir bağıntısıdır.
2. **A kümesinin bir işlemi,** $\mathbb{N}$ kümesinden bir n için, A^n kuvvetinden A kümesine giden bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, A kümesinin **n-konumlu** bir işlemidir. n-konumlu bir işlem, $(n+1)$-konumlu bir bağıntıdır, yani $f\colon A^n \to A$ ise, o zaman

$$f = \{(x_0, \dots, x_n) \in A^{n+1} \colon f(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_n\}.$$

1.2 Teoriler ve modelleri

$\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$ kümesi, $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ yapısının **imzasıdır.** Bu imza, sadece bir *simgeler* kümesidir. O simgelerle, biçimsel *cümleler* yazarız, örneğin

$$\exists x\ x \cdot x = 1 + 1.$$

Bu cümle, $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ yapısında *doğrudur,* ama imzası aynı olan $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ yapısında doğru değil, *yanlıştır.* Ayrıntılı tanımlar ileride verilecek.

Şimdilik, *teori,* bir cümleler kümesidir. (Daha sonra bu tanımı rötuş edeceğiz.) Örneğin, *gruplar teorisi* ve *cisimler teorisi* vardır. Bir teorinin **modeli,** teorideki her cümlenin doğru olduğu bir yapıdır. O zaman $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ yapısı, cisimler teorisinin bir modelidir (çünkü cisimdir); ama $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, 0, 1)$, cisimler teorisinin bir modeli değildir.

2 Tanımlanabilen bağıntılar

Cümle, *serbest değişkeni* olmayan bir *formüldür.* Formülün en basit örneği, bir $t_0 = t_1$ *denklemidir.*

Cisimler imzasında çalışalım. Bu imzada, serbest değişkeni x ve y olan

$$x \cdot x + y \cdot y = 1 + (1 + (1 + 1))$$

denklemi vardır. $x \cdot x$ terimin yerine x^2 ifadesini yazarız, ve $1 + (1 + (1 + 1))$ teriminin yerine 4 ifadesini yazarız. $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ cismi için, kısaltma olarak, $\mathbb{R}$ simgesini kullanalım. O zaman $x^2 + y^2 = 4$ denkleminin $\mathbb{R}$ yapısındaki bir *çözümler kümesi* vardır: bu küme, merkezi $(0, 0)$ olan ve yarıçapı 2 olan çemberdir. Denklem, çözümler kümesini **tanımlar** deriz.

$y = x + 1$ denkleminin $\mathbb{R}$ yapısındaki çözüm kümesi, bir doğrudur. Bu iki çözümler kümesinin kesişimi,

$$\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)\right\}$$

kümesidir. Bu küme, $\mathbb{R}$ yapısında,

$$x^2 + y^2 = 4 \land y = x + 1$$

formülü tarafından tanımlanır. Ayrıca, $[-2, 2]$ aralığı, yani

$$\{x \in \mathbb{R} \colon -2 \leqslant x \land x \leqslant 2\}$$

veya $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 \leqslant 4\}$ kümesi, serbest değişkeni x olan

$$\exists y \; x^2 + y^2 = 4$$

formülü tarafından tanımlanır.

$\mathscr{I}$ bir imza olsun; $\mathfrak{A}$, imzası $\mathscr{I}$ olan bir yapı olsun. O zaman $\mathfrak{A}$ bazı işlemleri, bağıntıları, ve elemanları ile donatılmış bir A kümesidir. Ayrıca $\mathscr{I}$ imzasındaki her S simgesi,

1) ya **işlem simgesi,**
2) ya **yüklem** (veya *bağıntı simgesi*)
3) ya da **değişmezdir** (veya *bireysel değişmez simgesidir*).

Sırasıyla A kümesinin $S^{\mathfrak{A}}$ (veya S) olarak yazılan

1) işlemi, veya
2) bağıntısı, veya
3) elemanı vardır;

ve

$$\mathfrak{A} = (A, S^{\mathfrak{A}})_{S\in\mathscr{I}}.$$

Burada $S^{\mathfrak{A}}$, S simgesinin $\mathfrak{A}$ yapısındaki **yorumudur.**

$\mathscr{I}$ imzasının formülleri,

1) $\mathscr{I}$ imzasındaki simgelerden,
2) eşit işaretinden,
3) bireysel değişkenlerden,
4) $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, ve $\leftrightarrow$ bağlayıcılarından,
5) $\exists$ ve $\forall$ simgelerinden, ve
6) ayraçlardan

yapılır. Ayrıntılı tanım sayfa 20'de verilecektir.

Bir formülün bazı değişkenleri*bağlı,* bazıları *serbesttir.* Bir formülün n serbest değişkeni varsa, o formüle n**-konumlu** denir. φ, $\mathscr{I}$ imzasının n-konumlu bir formülü olsun. O zaman φ formülünün $\mathfrak{A}$ yapısındaki çözüm kümesi vardır. Bu küme, A^n kuvvetinin bir altkümesidir, ve onu

$$\varphi^{\mathfrak{A}}$$

olarak yazarız. φ formülü, $\mathfrak{A}$ yapısında $\varphi^{\mathfrak{A}}$ kümesini **tanımlar;** bu $\varphi^{\mathfrak{A}}$ kümesi,

- φ formülünün $\mathfrak{A}$ yapısındaki **yorumudur;**
- $\mathfrak{A}$ yapısının n-konumlu **tanımlanabilen** bir bağıntısıdır.

Örneğin
$$(\exists y\ x^2 + y^2 = 4)^{\mathbb{R}} = [-2, 2].$$

φ formülünün **değillemesini,** yani $\neg\varphi$ formülünü oluşturabiliriz, ve bu formül, $\varphi^{\mathfrak{A}}$ kümesinin A^n kümesindeki *tümleyenini* tanımlar. Yani,
$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}} = A^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{A}}.$$

ψ, başka n-konumlu bir formül olsun. O zaman φ ve ψ formüllerin **tümel-evetlemesini** ve **tikel-evetlemesini,** yani $\varphi \land \psi$ ve $\varphi \lor \psi$ formüllerini oluşturabiliriz, ve
$$(\varphi \land \psi)^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}} \cap \varphi^{\mathfrak{A}}, \qquad (\varphi \lor \psi)^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}} \cup \varphi^{\mathfrak{A}}$$
olur. **İçerme** formülleri vardır, mesela $\varphi \to \psi$; ama bunlar yeni bir şey tanımlamaz:
$$(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{A}} = (\neg\varphi \lor \psi)^{\mathfrak{A}} = (A^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{A}}) \cup \psi^{\mathfrak{A}}.$$

Karşılıklı-koşulluklu formülleri de vardır, mesela $\varphi \leftrightarrow \psi$; ama bunlar da yeni bir şey tanımlamaz:
$$(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathfrak{A}} = ((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi))^{\mathfrak{A}} = (A^n \smallsetminus (\varphi^{\mathfrak{A}} \cup \psi^{\mathfrak{A}})) \cup (\varphi^{\mathfrak{A}} \cap \psi^{\mathfrak{A}}).$$

φ formülünün serbest değişkenleri, x_0, ..., x_{n-1} olsun. O zaman φ formülü,
$$\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$$
veya $\varphi(\vec{x})$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\varphi^{\mathfrak{A}}$, A^n kuvvetinin $\varphi(\vec{a})$ cümlesinin $\mathfrak{A}$ yapısında doğru olması sağlayan $\vec{a}$ elemanlarının kümesidir. Eğer $i < n$ ise, o zaman A^n kuvvetinden A^{n-1} kuvvetine giden
$$\pi_i^n(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

$$= (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n-1})$$

eşitliğini sağlayan bir π_i^n fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon, bir **koordinat izdüşümüdür.** Ayrıca, x_i değişkeninin **tikel nicelendiği** bir $\exists x_i\ \varphi$ formülü vardır, ve

$$(\exists x_i\ \varphi)^{\mathfrak{A}} = \pi_i^n[\varphi^{\mathfrak{A}}] = \{\pi_i^n(\vec{x}) \colon \vec{x} \in \varphi^{\mathfrak{A}}\}.$$

Bir değişkenin **tümel nicelemesi** olabilir, ama bu, yeni tanımlanabilen kümeler oluşturmaz:

$$(\forall x\ \varphi)^{\mathfrak{A}} = (\neg\exists x\ \neg\varphi)^{\mathfrak{A}}.$$

Tüm $\mathfrak{A}$ yapısında n-konumlu tanımlanabilen bağıntıların kümesi,

$$\mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$$

olsun. Bu küme, $\mathscr{P}(A^n)$ kuvvet kümesinin bir altkümesidir. $\mathscr{P}(A^n)$ kümesinin $\cap$, $\cup$, ve $\smallsetminus$ işlemlerine **Boole işlemi** denir. Bu işlemler altında $\mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$ kümesi kapalıdır. Üstelik, $\varnothing \in \mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$, çünkü

$$(x_0 \neq x_0 \lor \dots \lor x_{n-1} \neq x_{n-1})^{\mathfrak{A}} = \varnothing.$$

Yani, tanımlanabilen kümelerin bir **Boole bileşimi,** yine tanımlanabilen bir kümedir. O zaman

$$(\mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A}), \cap, \cup, \smallsetminus, \varnothing)$$

bir yapıdır. Ayrıca, tanımlanabilen kümenin koordinat izdüşümü, tanımlanabilen bir kümedir.

Şimdi $\mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$ kümelerinin kesin tanımını verelim.

1. $\mathscr{I}$ imzasındaki her n-konumlu B yüklemi için,

$$B^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A}).$$

2. $\{(x,x)\colon x \in A\} \in \mathrm{Tan}^2(\mathfrak{A})$, yani
$$\{(x,y) \in A^2 \colon x = y\} \in \mathrm{Tan}^2(\mathfrak{A}).$$
3. $\mathscr{I}$ imzasındaki her n-konumlu f işlem simgesi için,
$$f^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Tan}^{n+1}(\mathfrak{A}).$$
4. A kümesindeki her b için,
$$\{b\} \in \mathrm{Tan}^1(\mathfrak{A}).$$
5. Her m ve n için, eğer σ, $\{0,\dots,m-1\}$ kümesinden $\{0,\dots,n-1\}$ kümesine giden bir fonksiyon ise, ve $X \in \mathrm{Tan}^m(\mathfrak{A})$ ise, o zaman
$$\{(x_0,\dots,x_{n-1}) \in A^n \colon (x_{\sigma(0)},\dots,x_{\sigma(m-1)}) \in X\} \in \mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A}).$$
Mesela, $A \times X = \{(x_0,\dots,x_m) \in A^{m+1} \colon (x_1,\dots,x_m) \in X\}$, dolayısıyla
$$A \times X \in \mathrm{Tan}^{m+1}(\mathfrak{A});$$
ve $m = 2$ ise, o zaman
$$\{(y,x)\colon (x,y) \in X\} \in \mathrm{Tan}^2(\mathfrak{A})$$
olur.
6. $\mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$, Boole işlemleri altında kapalıdır.
7. Eğer $i < n$ ve $Y \in \mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$ ise,
$$\pi^n_i[Y] \in \mathrm{Tan}^{n-1}(\mathfrak{A}).$$

Alıştırma 1.

a) $\varnothing$ ve A^n kümelerinin $\mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$ kümesinde olduğunu gösterin.

b) $\mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$ kümelerinin tanımındaki 7. koşulun yerine
$$\pi^n_{n-1}[Y] \in \mathrm{Tan}^{n-1}(\mathfrak{A})$$
koşulunun yazılabileceğini gösterin.

c) Eğer 5. koşuldaki gibi $\sigma\colon \{0,\dots,m-1\} \to \{0,\dots,n-1\}$ ise, ve $Y \in \operatorname{Tan}^n(\mathfrak{A})$ ise, o zaman A^m kümesinin, Y kümesinin bir $(y_0,\dots,y_{n-1})$ elemanı için

$$(x_0,\dots,x_{m-1}) = (y_{\sigma(0)},\dots,y_{\sigma(m-1)})$$

eşitliğini sağlayan $(x_0,\dots,x_{m-1})$ elemanlarının kümesinin $\operatorname{Tan}^m(\mathfrak{A})$ kümesinde olduğunu gösterin.

d) Bir küme, imzası boş olan bir yapıdır. A, öyle bir yapı olsun. $\operatorname{Tan}^1(\mathfrak{A})$ kümesinin elemanları nelerdir? $\operatorname{Tan}^2(\mathfrak{A})$ kümesinin elemanları nelerdir?

Alıştırma 2.

a) $(\mathbb{R},+,-,\,\cdot\,)$ yapısında $<$ bağıntısının tanımlanabildiğini gösterin.

b) $(\mathbb{C},+,-,\,\cdot\,,z\mapsto\bar{z})$ yapısında $\mathbb{R}$ kümesinin tanımlanabildiğini gösterin. (Sayfa 46'daki Alıştırma 26'ya bakın.)

3 Niceleyicilerin giderilmesi

Bazen bir teorinin modellerinin tüm tanımlanabilen kümelerini bulmak için, koordinat izdüşümleri gerekmez. Bu durumda, o teori, **niceleyicilerin giderilmesine** imkân verir. Formülleri kullanan bir tanım daha sonra verilecek.

3.1 Sonsuz doğrusal uzaylar

K, bir cisim olsun. Bu K cismi, ya $\mathbb{C}$, ya $\mathbb{R}$, ya $\mathbb{Q}$, ya sonlu bir cisim, ya da başka bir cisim olabilir. Eğer $\mathfrak{U}$, K cismi üstündeki doğrusal bir uzay ise, o zaman K cismindeki her a için, $\mathfrak{U}$ uzayının $x \mapsto a \cdot x$ veya $a\cdot$ işlemi vardır. Dolayısıyla K cismi üstündeki doğrusal uzayların imzası,

$$\{+, -, 0\} \cup \{a\cdot \colon a \in K\}$$

kümesidir. Doğrusal uzay teorisinin *aksiyomları* aşağıdadır.

1. Değişmeli gruplar aksiyomları, yani

$$\begin{gathered}\forall x\ \forall y\ x + y = y + x,\\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ x + (y + z) = (x + y) + z,\\ \forall x\ 0 + x = x,\\ \forall x\ -x + x = 0.\end{gathered}$$

2. K cismindeki her a için,

$$\forall x\ \forall y\ a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y.$$

(Yani $a\cdot$ bir grup endomorfizmidir.)

3. K cismindeki her a ve b için, $a+b=c$ ise,

$$\forall x\ a\cdot x+b\cdot x=c\cdot x.$$

(Yani $a\mapsto a\cdot$ bir grup homomorfizmidir.)

4. K cismindeki her a ve b için, $a\cdot b=d$ ise,

$$\forall x\ a\cdot(b\cdot x)=d\cdot x.$$

(Dolayısıyla $a\mapsto a\cdot$ bir halka homomorfizmidir.)

5. Son olarak

$$\forall x\ 1\cdot x=x.$$

(Dolayısıyla $a\mapsto a\cdot$ bir birimli halka homomorfizmidir.)

K cismi üstündeki doğrusal uzaylar teorisi olarak,

$$T_K$$

yazalım. Bunun imzası $\mathscr{I}_K$ olsun. (Yani, $\mathscr{I}_K=\{+,-,0,a\cdot\}_{a\in K}$.) Şimdi φ, $\mathscr{I}_K$ imzasındaki n-konumlu bir denklem olsun. O zaman K cisminde öyle a^0, …, a^{n-1} vardır ki φ,

$$a^0\cdot x_0+\dots+a^{n-1}\cdot x_{n-1}=0$$

veya

$$\sum_{k<n}a^k\cdot x_k=0$$

denklemine T_K teorisine göre denktir. Yani, K cismi üstündeki her doğrusal $\mathfrak{U}$ uzayı için,

$$\varphi^{\mathfrak{U}}=(a^0\cdot x_0+\dots+a^{n-1}\cdot x_{n-1}=0)^{\mathfrak{U}}.$$

Özel olarak φ, $\mathfrak{U}^n$ uzayının bir alt uzayını tanımlar. Ancak $k\leqslant n$ olsun, ve $\mathfrak{U}$ uzayının b_k, …, b_{n-1} elemanları olsun. O zaman

$$\varphi(x_0,\dots,x_{k-1},b_k,\dots,b_{n-1})$$

denklemini oluşturabiliriz. Bu formül, $b = -(a^k \cdot b_k + \cdots + a^{n-1} \cdot b_{n-1})$ eşitliğinin olduğu

$$a^0 \cdot x_0 + \cdots + a^{k-1} \cdot x^{k-1} = b$$

denklemine denktir, ve $\mathfrak{U}^k$ uzayının *afin bir altkümesini* tanımlar. Bunun gibi kümelerin bir Boole bileşimi ne olur?—ve onların koordinat izdüşümleri nedir?

Eğer f, bir A kümesinden bir B kümesine giden bir fonksiyon ise, yani

$$f \colon A \to B$$

ise, ve X ile Y, A kümesinin altkümeleriyse, o zaman

$$f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$$

kapsamasını biliyoruz; ancak

$$f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$$

eşitliğini de biliyoruz. Özellikle $i < n$ ise, ve $X, Y \subseteq U^n$ ise, o zaman

$$\pi_i^n[X \cup Y] = \pi_i^n[X] \cup \pi_i^n[Y].$$

Ayrıca,

$$A \smallsetminus (X \cup Y) = (A \smallsetminus X) \cap (A \smallsetminus Y),$$
$$A \smallsetminus (X \cap Y) = (A \smallsetminus X) \cup (A \smallsetminus Y).$$

Ama $\pi_i^n[X \cap Y]$ nedir?

Bir s ve t için, her i ve j için, $i < s$ ve $j < t$ ise, $\varphi_i(x_0, \ldots, x_n)$ ve $\psi_j(x_0, \ldots, x_n)$, $\mathscr{I}_K$ imzasındaki denklem olsunlar. O zaman

$$\exists x_n \; (\varphi_0 \land \cdots \land \varphi_{s-1} \land \neg\psi_0 \land \cdots \land \neg\psi_{t-1})$$

veya

$$\exists x_n \left(\bigwedge_{i<s} \varphi_i \land \bigwedge_{j<t} \neg\psi_j \right)$$

formülünü oluşturuz. Bu formül, T_K teorisine göre,

$$\exists x_n \left(\bigwedge_{i<s} \sum_{k<n} a_i^k \cdot x_k = x_n \wedge \bigwedge_{j<t} \sum_{k<n} b_j^k \cdot x_k \neq x_n \right)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $s > 0$ ise, o zaman T_K teorisine göre formülümüzü, x_n değişkeninin yerine $\sum_{k<n} a_{s-1}^k \cdot x_k$ terimini koyduktan sonra

$$\bigwedge_{i<s-1} \sum_{k<n} a_i^k \cdot x_k = \sum_{k<n} a_{s-1}^k \cdot x_k \wedge \bigwedge_{j<t} \sum_{k<n} b_j^k \cdot x_k \neq \sum_{k<n} a_{s-1}^k \cdot x_k$$

olarak yazabiliriz. Şimdi $s = 0$ varsayalım. Bu durumda, formülümüz

$$\exists x_n \bigwedge_{j<t} \sum_{k<n} b_j^k \cdot x_k \neq x_n \tag{$*$}$$

şeklindedir. T_K teorisinin bir modeli, sonlu olabilir, ve bu durumda, bir $(x_0, \dots, x_{n-1})$ eleman listesi için, formül yanlış olabilir. O zaman,

$$T_K^*,$$

K üstündeki *sonsuz* doğrusal uzaylar teorisi olsun. Bu teorinin aksiyomları, T_K teorisinin aksiyomlarıyla her n için,

$$\exists x_0 \ \cdots \exists x_n \ (x_0 \neq x_1 \wedge x_0 \neq x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$$

veya

$$\exists x_0 \ \cdots \exists x_n \bigwedge_{i<j<n} x_i \neq x_j.$$

cümlesidir. (Eğer K zaten sonsuzsa, $\exists x \; x \neq 0$ aksiyomu yeterlidir.) T_K^* teorisine göre $(*)$ satırındaki formülümüz her $(x_0, \dots, x_{n-1})$ için doğrudur, ve

$$x_0 = x_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = x_{n-1}$$

formülüne denktir. Sonuç olarak, aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 1. *T_K^* teorisi, niceleyecilerin giderilmesine imkân verir.*

Alıştırma 3. Boş imzada sonsuz kümeler teorisinin niceleyicilerin giderilmesine imkân verdiğini gösterin.

3.2 Formüller

Bu bölümde adım adım formülleri tanımlayacağız. $\mathscr{I}$, bir imza olsun, ve $\mathfrak{A}$, imzası $\mathscr{I}$ olan rastgele bir yapı olsun. Bir $\mathscr{I}(A)$ imzasını oluştururuz. Bu imzada, A kümesinin her b elemanı, bir b değişmezi olarak yer alır, ve $b^{\mathfrak{A}} = b$. (Farkı vurgulamak istersek, b değişmezini, $\bar{b}$ olarak yazabiliriz. Bu durumda $\bar{b}^{\mathfrak{A}} = b$.)

3.2.1 Terimler

İlk olarak **terimler** tanımlanmalı.

1. Her k için,
$$x_k$$
değişkeni, $\mathscr{I}$ imzasının bir terimidir.
2. $\mathscr{I}$ imzasındaki her b değişmezi için,
$$b$$
ifadesi, $\mathscr{I}$ imzasının bir terimidir.
3. Her m için, $\mathscr{I}$ imzasındaki her m-konumlu f işlem simgesi için, eğer t_0, …, t_{m-1}, $\mathscr{I}$ imzasının terimiyse, o zaman
$$ft_0 \cdots t_{m-1}$$
ifadesi, $\mathscr{I}$ imzasının bir terimidir. (İstersek, $m = 0$ olabilir. Bu durumda, f bir değişmezdir, ve $ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimi sadece f ifadesidir.)

Tabii ki bu tanımda $\mathscr{I}$ imzasının yerine $\mathscr{I}(A)$ imzasını koyabiliriz. O zaman t, $\mathscr{I}(A)$ imzasının bir terimi olsun. Bir n için, t teriminde bulunan her x_k değişkeni için, $k < n$ varsayalım. Aşağıdaki tanıma göre, A kümesinin n-konumlu bir $t^{\mathfrak{A}}$ işlemi vardır. A^n kuvvetindeki her $(a_0, \dots, a_{n-1})$ veya $\vec{a}$ için,
$$x_k{}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = a_k,$$

$$b^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = b^{\mathfrak{A}},$$
$$ft_0 \cdots t_{m-1}{}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = f^{\mathfrak{A}}(t_0{}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, t_{m-1}{}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})).$$

Alıştırma 4. Eğer f, iki konumlu bir işlem simgesiyse, çoğunlukla ft_0t_1 ifadesinin yerine $t_0\ f\ t_1$ ifadesini yazmak isteriz. Bu durumda, nasıl bir sıkıntı çıkabilir?

3.2.2 Bölünemeyen formüller

Bölünemeyen formüllerin iki çeşiti var.

1. t_0 ve t_1, $\mathscr{I}$ imzasının terimiyse
$$t_0 = t_1$$
denklemi, $\mathscr{I}$ imzasının bölünemeyen bir formülüdür.
2. $t_0, \dots, t_{m-1}$, $\mathscr{I}$ imzasının m tane terimiyse, ve R, $\mathscr{I}$ imzasının m-konumlu bir yüklemiyse,
$$Rt_0 \cdots t_{m-1}$$
ifadesi, $\mathscr{I}$ imzasının bölünemeyen bir formülüdür.

Ayrıca, t_k terimleri n konumluysa,

$$(t_0 = t_1)^{\mathfrak{A}} = \{\vec{x} \in A^n \colon t_0{}^{\mathfrak{A}}(\vec{x}) = t_1{}^{\mathfrak{A}}(\vec{x})\},$$
$$Rt_0 \cdots t_{m-1}{}^{\mathfrak{A}} = \{\vec{x} \in A^n \colon (t_0{}^{\mathfrak{A}}(\vec{x}), \dots, t_{m-1}{}^{\mathfrak{A}}(\vec{x})) \in R^{\mathfrak{A}}\}.$$

Alıştırma 5. Eğer B, iki konumlu bir bağıntı simgesiyse, çoğunlukla Bt_0t_1 ifadesinin yerine $t_0\ B\ t_1$ ifadesini yazmak isteriz. Bu durumda, sıkıntı çıkar mı?

3.2.3 Formüller

Şimdi **formülleri** tanımlayabiliriz.

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.
2. Eğer φ ve ψ formül ise, o zaman $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $\exists x_k\ \varphi$, ve $\forall x_k\ \varphi$, formüldür.

Bu formüllerin yorumlarını daha önce tanımlamıştık. Her φ formülünün **serbest değişkenleri,** bir $\mathrm{sd}(\varphi)$ kümesini oluşturur:

1. Eğer φ bölünemeyen ise, $\mathrm{sd}(\varphi)$, φ formülünde bulunan değişkenleri içerir.
2. $\mathrm{sd}(\neg\varphi) = \mathrm{sd}(\varphi)$.
3. $\mathrm{sd}(\varphi * \psi) = \mathrm{sd}(\varphi) \cup \mathrm{sd}(\psi)$.
4. $\mathrm{sd}(\exists x_k\ \varphi) = \mathrm{sd}(\varphi) \smallsetminus \{x_k\}$.

Eğer φ, $\mathscr{I}(A)$ imzasının formülüyse, ve $\mathrm{sd}(\varphi) \subseteq \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, o zaman $\varphi^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{Tan}^n(\mathfrak{A})$.

Alıştırma 6. Bu tanıma göre, eğer B 2-konumlu bir yüklemse, o zaman bir serbest değişkenli olan $\exists x_0\ Bx_0x_1$ formülü tarafından tanımlanmış $(\exists x_0\ Bx_0x_1)^{\mathfrak{A}}$ kümesi, ya A^2 kümesinin, ya da ($n > 2$ iken) A^n kümesinin altkümesi olarak anlaşılabilir; ama A kümesinin altkümesi değildir. Bu bir sıkıntı mıdır?

3.2.4 Yapılarda doğruluk

A^n kümesi, $\{0, \dots, n-1\}$ kümesinden A kümesine giden tüm fonksiyonların kümesi olarak düşünebilir. Burada $n = 0$ olabilir, ve bu durumda, $\{0, \dots, n-1\}$ kümesi boştur. Boş kümeden A kümesine sadece bir fonksiyon vardır, ve bu fonksiyon da boş kümedir. Boş kümeyi $\varnothing$ veya 0 olarak yazarız. O zaman

$$A^0 = \{0\}$$

olur. $\{0\}$ kümesini 1 olarak yazabiliriz. O zaman $A^0 = 1$, ve

$$\mathscr{P}(A^0) = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\}.$$

Daha önce dediğimiz gibi, bir **cümle,** serbest değişkeni olmayan bir formüldür. σ bir cümleyse, yukarıdaki tanımlara göre, $\sigma^{\mathfrak{A}} \in \operatorname{Tan}^0(\mathfrak{A})$, onun için $\sigma^{\mathfrak{A}} \in \{0, 1\}$.

- $\sigma^{\mathfrak{A}} = 1$ ise σ, $\mathfrak{A}$ yapısında **doğrudur.**
- $\sigma^{\mathfrak{A}} = 0$ ise σ, $\mathfrak{A}$ yapısında **yanlıştır.**

$\mathfrak{A}$ yapısında, σ doğruysa

$$\mathfrak{A} \models \sigma$$

ifadesi yazılabilir, ve değilse

$$\mathfrak{A} \not\models \sigma.$$

Γ, imzaları $\mathscr{I}$ olan bir cümleler kümesi olsun. Eğer Γ kümesinin her elemanı $\mathfrak{A}$ yapısında doğruysa, o zaman $\mathfrak{A}$, Γ kümesinin bir **modelidir,** ve

$$\mathfrak{A} \models \Gamma$$

ifadesi yazılabilir. (Bu kitapta, bundan sonra, $\models$ işareti kullanılmaz.)

Eğer bir σ cümlesi, Γ kümesinin her modelinde doğruysa, o zaman Γ, σ cümlesini **gerektirir.** T, Γ tarafından gerektirilmiş tüm cümlelerinin kümesi olsun. O zaman T, bir cümle gerektirirse, bu cümle zaten T kümesindedir. Bu durumda T, bir **teoridir,** ve Γ, T için bir **aksiyom kümesidir.**

Alıştırma 7. $(\mathbb{R}, +, 0)$ ve $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ yapılarını $\{f, u\}$ imzasında düşünün. (Yani, bu yapılar sırasıyla $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$ ise, o zaman $A = \mathbb{R} = B$, $f^{\mathfrak{A}} = +$, $f^{\mathfrak{B}} = \cdot$, $u^{\mathfrak{A}} = 0$, ve $u^{\mathfrak{B}} = 1$.) Tanıma göre, niçin

$$\forall x_1\ \exists x_0\ f x_0 x_1 = u$$

cümlesi, $(\mathbb{R}, +, 0)$ yapısında doğrudur, ama $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ yapısında yanlıştır?

3.2.5 Teorilere göre denklik

φ ve ψ, $\mathscr{S}$ imzasının iki n-konumlu formülü olsun. Eğer

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \, (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

cümlesi, imzası $\mathscr{S}$ olan her yapıda doğruysa, o zaman φ ve ψ, birbirine **eşdeğer** veya **denktir.** Örneğin,

$$\begin{gathered}
\varphi \to \psi \text{ denktir } \neg\varphi \lor \psi, \\
\varphi \leftrightarrow \psi \text{ denktir } (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi), \\
\neg\neg\varphi \text{ denktir } \varphi, \\
\neg(\varphi \land \psi) \text{ denktir } \neg\varphi \lor \neg\psi, \qquad \neg(\varphi \lor \psi) \text{ denktir } \neg\varphi \land \neg\psi, \\
\varphi \land \psi \text{ denktir } \psi \land \varphi, \qquad \varphi \lor \psi \text{ denktir } \psi \lor \varphi, \\
(\varphi \land \psi) \land \chi \text{ denktir } \varphi \land (\chi \land \psi), \quad (\varphi \lor \psi) \lor \chi \text{ denktir } \varphi \lor (\chi \lor \psi), \\
\varphi \land (\psi \lor \chi) \text{ denktir } (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \chi), \\
\varphi \lor (\psi \land \chi) \text{ denktir } (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi), \\
\forall x \, \varphi \text{ denktir } \neg\exists x \, \neg\varphi, \\
\exists x \, (\varphi \lor \psi) \text{ denktir } \exists x \, \varphi \lor \exists x \, \psi, \\
\exists x \, \varphi \lor \exists y \, \psi \text{ denktir } \exists x \, \exists y \, (\varphi \lor \psi), \\
\exists x \, \varphi \land \exists y \, \psi \text{ denktir } \exists z \, \exists w \, (\varphi^x_z \land \psi^y_w);
\end{gathered}$$

son satırda, x ile y değişkenleri birbiriyle aynı olabilir, ama z ve w değişkenleri birbirinden farklıdır, ve φ ve ψ formülünde bulunmaz; φ^x_z, φ formülünde bulunan her x değişkeninin yerine z değişkeni konularak oluşturulur; ψ^y_w benzerdir.

$\exists x$ ve $\forall x$ gibi ifadeler, **niceleyicidir.** Yukarıdaki denklikler sayesinde her formül, tüm niceleyicilerinin önünde bulunduğu bir formüle denktir. Üstelik, her niceleyicisiz formül,

$$\varphi_0 \lor \cdots \lor \varphi_{n-1}$$

şeklindeki bir formüle denktir, öyle ki her φ_i formülü,

$$\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_{m-1}$$

şeklindeki bir formüle denktir, öyle ki her ψ_j formülü, ya bölünemeyen bir formül, ya da onun değillemesidir. Böyle bir niceleyicisiz formül, **tikel-evetlemeli normal biçimdedir.**

$\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ şeklinde bir formül, **tümel-evetlemeli** bir formüldür. $\psi_0 \vee \cdots \vee \psi_{m-1}$ şeklinde bir formül, **tikel-evetlemeli** bir formüldür. Bölünemeyen bir formül, ve onun değillemesi, **harfi** bir formüldür.

Eğer T, $\mathscr{I}$ imzasında bir teoriyse, ve

$$\forall x_0 \ \cdots \forall x_{n-1} \ (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

cümlesi, T teorisinin her modelinde doğruysa, o zaman φ ve ψ, T **teorisine göre** birbirine eşdeğer veya denktir.

$\mathscr{I}$ imzasının en az bir değişmezi olsun. Eğer T teorisine göre, her φ formülü, serbest değişkenleri aynı olan bir formüle denk ise, o zaman T, **niceleyicilerin giderilmesine** imkân verir. Eğer $\mathscr{I}$ imzasının değişmezi yoksa, bu tanımda bir değişlik yapmalıyız: φ, cümle olmamalı.

Alıştırma 8. Niceleyicilerin giderilmesi için iki tane tanımımız vardır. Bu tanımların birbirine denk olduğunu gösterin.

Teorem 2. *(a) İmzasının en az bir değişmezi olan T teorisine göre, ψ_i formüllerinin harfi olduğu her*

$$\exists x \ (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_{n-1})$$

formülü, serbest değişkenleri aynı olan bir formüle denk ise, o zaman T, niceleyicilerin giderilmesine imkân verir.

(b) İmzasının bir değişmezi olmayan T teorisine göre, ψ_i formüllerinin harfi olduğu ve cümle olmayan her

$$\exists x \ (\psi_0 \wedge \cdots \wedge \psi_{n-1})$$

formülü, serbest değişkenleri aynı olan bir formüle denk ise, o zaman T, niceleyicilerin giderilmesine imkân verir.

Alıştırma 9. Son teoremi kanıtlayın.

3.3 Uçsuz yoğun doğrusal sıralamalar

Doğrusal sıralamalar teorisini

$$T_<$$

olarak yazalım. Bu teorinin aksiyomları, aşağıdaki cümlelerdir.

$$\begin{aligned} &\forall x\, \neg(x < x), && \text{[yansımasız]} \\ &\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x < y \land y < z \to x < z), && \text{[geçişmeli]} \\ &\forall x\, \forall y\, (x < y \lor x = y \lor y < x). && \text{[bağlantılı]} \end{aligned}$$

Bu teorinin imzası $\{<\}$ kümesidir. Bu imzanın terimleri, sadece değişkenlerdir. Bu imzanın bölünemeyen formülleri, $x = y$ veya $x < y$ şeklindedir. (Burada $<xy$ formülünün yerine $x < y$ ifadesini yazarız.)

Uçsuz yoğun doğrusal sıralamalar teorisini

$$T^*_<$$

olarak yazalım. Bu teorinin aksiyomları, $T_<$ teorisinin aksiyomlarıyla aşağıdaki cümlelerdir.

$$\begin{aligned} &\forall x\, \exists y\, \exists z\, (y < x \land x < z), && \text{[uçsuz]} \\ &\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x < y \to x < z \land z < y). && \text{[yoğun]} \end{aligned}$$

$T^*_<$ teorisinin niceleyicilerin giderilmesine imkân verdiğini ispatlayacağız. İspatın fikri, aşağıdaki denkliklerdedir. $T^*_<$ teorisine göre,

$$\neg(x < y) \text{ denktir } x = y \lor y < x,$$
$$\exists z\, (x < z \land z < y) \text{ denktir } x < y.$$

Teorem 3. *$T^*_<$ teorisinin niceleyicilerin giderilmesine imkân verir.*

Kanıt. φ, $(n+2)$-konumlu niceleyicisiz bir formül olsun. $\exists x_{n+1}\ \varphi$ formülünün niceleyicisini gidermek istiyoruz. $\mathfrak{A}$, $T^*_<$ teorisinin bir modeli olsun, ve

$$(a_0, \dots, a_n) \in (\exists x_{n+1}\ \varphi)^{\mathfrak{A}}$$

olsun. O zaman A kümesindeki bir a_{n+1} için,

$$(a_0, \dots, a_{n+1}) \in \varphi^{\mathfrak{A}}.$$

Her i ile j için, $i < j \leqslant n$ ise, ψ_{ij} formülü,

- $x_i < x_j$ olsun, eğer $a_i < a_j$ ise;
- $x_i = x_j$ olsun, eğer $a_i = a_j$ ise;
- $x_j < x_i$ olsun, eğer $a_j < a_i$ ise.

Şimdi

$$\bigwedge_{i<j\leqslant n} \psi_{ij}$$

tümel-evetlemesine bakalım. Bu formüle, $(a_0, \dots, a_n)$ listesinin **sıralama tipi** denebilir. Bu şekilde elde edilebilecek formüllerin sayısı sonludur. O formüllerin sayısı, M olsun, ve o formüller, $i < M$ iken θ_i olsun. O zaman $T^*_<$ teorisine göre

$$\exists x_{n+1}\ \varphi \text{ denktir } \bigvee_{i<M} \theta_i. \tag{†}$$

denkliğini göstereceğiz. ($M = 0$ durumunda $\bigvee_{i<M} \theta_i$, $x_0 \neq x_0 \vee \dots \vee x_n \neq x_n$ formülü olarak tanımlanır.)

$\mathfrak{B}$, $T^*_<$ teorisinin bir modeli olsun. Eğer

$$(b_0, \dots, b_n) \in (\exists x_{n+1}\ \varphi)^{\mathfrak{B}}$$

ise, o zaman θ_i formüllerinin tanımından bir j için,

$$(b_0, \dots, b_n) \in {\theta_j}^{\mathfrak{B}},$$

dolayısıyla

$$(b_0,\dots,b_n)\in\Big(\bigvee_{i<M}\theta_i\Big)^{\mathfrak{B}}.$$

Tam tersine, bir j için, $(b_0,\dots,b_n)\in{\theta_j}^{\mathfrak{B}}$ varsayalım. θ_j formülünün tanımına göre, $T^*_<$ teorisinin, A kümesinin a_k elemanları için

$$(a_0,\dots,a_{n+1})\in\varphi^{\mathfrak{A}},\qquad\qquad(a_0,\dots,a_n)\in{\theta_j}^{\mathfrak{A}}$$

içindeliklerinin olduğu $\mathfrak{A}$ modeli vardır. $(b_0,\dots,b_n)$ ve $(a_0,\dots,a_n)$ listelerinin sıralama tipleri, birbiriyle aynıdır. B kümesindeki bir b_{n+1} için

$$(b_0,\dots,b_{n+1}),\qquad\qquad(a_0,\dots,a_{n+1})$$

listelerin sıralama tiplerinin birbiriyle aynı olduğunu göstereceğiz. O zaman kanıtımız tamamlanmış olacak.

Şimdi, bir i ile j için, $i\neq j$ ama $a_i=a_j$ mümkündür. $\{a_0,\dots,a_n\}$ kümesinin eleman sayısı, $m+1$ olsun. İndisleri değiştirdikten sonra,

$$\{a_0,\dots,a_n\}=\{a_0,\dots,a_m\},\qquad\qquad a_0<\dots<a_m$$

varsayabiliriz. O zaman

1) ya $a_{n+1}<a_0$,
2) ya $a_m<a_{n+1}$,
3) ya bir i için, $i<m$ ve $a_i<a_{n+1}<a_{i+1}$,
4) ya da, bir i için, $i\leqslant m$ ve $a_{n+1}=a_i$.

$\mathfrak{B}$ yapısının $T^*_<$ teorisinin bir modeli olması sayesinde, sırasıyla B kümesinde

1) ya $b_{n+1}<b_0$,
2) ya $b_m<b_{n+1}$,
3) ya aynı i için, $b_i<b_{n+1}<b_{i+1}$,
4) ya da, aynı i için, $b_{n+1}=b_i$

koşulunun sağlandığı bir b_n vardır. O zaman $(b_0, \ldots, b_{n+1}) \in \varphi^{\mathfrak{B}}$, dolasıyıyla

$$(b_0, \ldots, b_n) \in (\exists x_{n+1}\ \varphi)^{\mathfrak{B}}.$$

Öyleyse (†) satırındaki denklik doğrudur. $\square$

Alıştırma 10. Kaç tane n-konumlu sıralama tipi vardır?

Alıştırma 11.

a) $T^*_<$ teorisine göre her cümlenin, ya $\exists x\ x = x$ ya da $\forall x\ x \neq x$ cümlesiye denk olduğunu gösterin.

b) $T^*_<$ teorisinin boş olmayan modellerinin teorisine göre her cümlenin, ya $\forall x\ x = x$, ya da $\exists x\ x \neq x$ cümlesiye denk olduğunu gösterin.

4 Tamlık

$\mathfrak{A}$, imzası $\mathscr{I}$ olan bir yapı olsun. $\mathscr{I}$ imzasının $\mathfrak{A}$ yapısındaki tüm doğru cümlelerin kümesi, **$\mathfrak{A}$ yapısının teorisidir.** Bu tanım, teorilerin yukarıdaki tanımına uyar; bir yapının teorisi, bir teoridir.

T, imzası $\mathscr{I}$ olan bir teori olsun. Eğer $\mathscr{I}$ imzasındaki her σ cümlesi için T, ya σ ya da $\neg\sigma$ cümlesini gerektirirse, o zaman T, **tam** bir teoridir. Özellikle, bir yapının teorisi, tam bir teoridir.

Örneğin, $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ yapısının tam teorisi vardır. Fakat *Gödel'in Eksiklik Teoremine* göre, bu teori için bir aksiyom kümesi yazılamaz: bu teorinin aksiyomlarını yazmak için, hiç bir *kural* yoktur. Öte yandan, eğer K sonlu bir cisim ise, T_K^* teorisinin aksiyom kümesi sonsuzdur, ama bu aksiyomları yazabiliriz: bu teorinin aksiyomlarını yazmak için, bir kural vardır.

Teorem 4. *Her K cismi için, T_K^* teorisi tamdır.*

Kanıt. T_K^* teorisine göre, imzasındaki her cümle, niceleyicisiz bir cümleye denktir, ve o zaman T_K^* teorisine göre ya $0 = 0$ ya da $0 \neq 0$ cümlesine denktir (sayfa 29'daki Alıştırma 12'ye bakın). □

İki yapının teorileri birbiriyle aynıysa, o yapılar, birbirine **temelce denktir.** Örneğin, $\mathbb{Q}$ cismi üstündeki doğrusal uzaylar olarak, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ uzayları, birbirine temelce denktir, çünkü bu iki yapı, T_K^* teorisinin modelidir, ve bu teori, tamdır.

Teorem 5. *$T_<^*$ teorisinin boş olmayan modellerinin teorisi tamdır. Yani, aksiyomları*

- *$T_<^*$ teorisinin aksiyomları ve*

- *$\exists x\ x = x$ cümlesi*

olan teori, tamdır.

Kanıt. Bu teori, T olsun. Bunun imzasının değişmezi yok; ama $T^*_<$ teorisine göre, her σ cümlesi için, $\sigma \wedge x_0 = x_0$ formülü, serbest değişmezi x_0 olan niceleyicisiz bir formüle denktir. Öyle bir formül, ya $x_0 = x_0$ ya da $x_0 \neq x_0$ formülüne denktir. Sırasıyla T, ya σ ya da $\neg\sigma$ cümlesini gerektirir. □

Alıştırma 12. T^*_K teorisine göre, imzasının niceleyicisiz her cümlenin, ya $0 = 0$ ya da $0 \neq 0$ cümlesine denk olduğunu gösterin.

Alıştırma 13. Boş imzada sonsuz kümeler teorisinin tam olduğunu gösterin.

5 Eşyapı dönüşümleri

İmzaları $\mathscr{I}$ olan $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, iki yapı olsun, ve h, A kümesinden B kümesine birebir örten bir gönderme olsun. $\mathscr{I}$ imzasındaki her S için,

1) S bir değişmezse,
$$h(S^{\mathfrak{A}}) = S^{\mathfrak{B}};$$

2) S, n-konumlu bir işlem simgesiyse, A^n kuvvetindeki her $\vec{c}$ için,
$$h(S^{\mathfrak{A}}(c_0, \dots, c_{n-1})) = S^{\mathfrak{B}}(h(c_0), \dots, h(c_{n-1}));$$

3) S, n-konumlu bir yüklemse, A^n kuvvetindeki her $\vec{c}$ için,
$$(c_0, \dots, c_{n-1}) \in S^{\mathfrak{A}} \text{ ancak ve ancak } (h(c_0), \dots, h(c_{n-1})) \in S^{\mathfrak{B}}$$

koşullarını varsayalım. O zaman h, $\mathfrak{A}$ yapısından $\mathfrak{B}$ yapısına giden bir **eşyapı dönüşümü** veya **izomorfizimdir.**

Bir gruplar izomorfizmi, modeller kuramına göre de bir izomorfizimdir. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ olsun. Sayılar teorisinden,

$$\textit{eğer } a \equiv b \textit{ ve } c \equiv d \pmod{n}, \textit{ o zaman } a + c \equiv b + d \pmod{n}.$$

$\mathbb{Z}$ kümesindeki her k icin,
$$\bar{k} = \{x \in \mathbb{Z} \colon x \equiv k \pmod{n}\}$$
olsun. Ondan sonra,
$$\mathbb{Z}/(n) = \{\bar{x} \colon x \in \mathbb{Z}\}$$
olsun. Sayılar teorisinden yukarıdaki teoreme göre, $\mathbb{Z}/(n)$ kümesinin
$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$

eşitliğini sağlayan $+$ işlemi vardır. Ancak, $\{0, \dots, n-1\}$ kümesinin

$$x \oplus y = \begin{cases} x+y, & \text{eğer } x+y<n \text{ ise,} \\ x+y-n, & \text{eğer } n \leqslant x+y \text{ ise} \end{cases}$$

koşullarını sağlayan $\oplus$ işlemi vardır. $x \mapsto \bar{x}$ göndermesi, $(\{0, \dots, n-1\}, \oplus\}$ yapısından $(\mathbb{Z}/(n), +)$ yapısına bir izomorfizimdir.

Ayrıca, $B = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : y < x\}$ olsun. O zaman $x \mapsto -x$ göndermesi, $(\mathbb{Z}, <)$ yapısından $(\mathbb{Z}, B)$ yapısına bir izomorfizimdir.

Teorem 6. *İzomorf yapılar, temelce denktir.*

Kanıt. Bu teorem bariz ise de, bir kanıtı vardır. $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, imzaları $\mathscr{I}$ olan iki yapı olsun, ve h, $\mathfrak{A}$ yapısından $\mathfrak{B}$ yapısına giden bir izomorfizim olsun. $\mathscr{I}$ imzasının her φ formülü için,

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}] = \varphi^{\mathfrak{B}} \tag{$*$}$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Burada $\varphi^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ ise

$$\begin{aligned} h[\varphi^{\mathfrak{A}}] &= \{h(\vec{a}) \colon \vec{a} \in \varphi^{\mathfrak{A}}\} \\ &= \{(h(a_0), \dots, h(a_{n-1})) \colon (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \varphi^{\mathfrak{A}}\} \end{aligned}$$

olur. İlk olarak, her n için, $\mathscr{I}$ imzasının her n-konumlu t terimi ve A^n kuvvetindeki her $\vec{a}$ için,

$$h(t^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = t^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})) \tag{$\dagger$}$$

eşitliğini kanıtlayacağız. t bir değişken veya değişmezse, eşitlik doğrudur. f, m-konumlu bir işlem simgesi olsun, ve $k < m$ koşulunu sağlayan her k için, eğer t, t_k ise, ($\dagger$) satırındaki eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} h(ft_0 \cdots {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) &= h(f^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})), \dots, h({t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f^{\mathfrak{B}}({t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})))\\
&= (ft_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})).
\end{aligned}$$

Öyleyse t, $ft_0 \cdots t_{m-1}$ iken (†) satırındaki eşitlik doğrudur. Dolayısıyla (†) satırındaki eşitlik her durumda doğrudur.

Şimdi $(*)$ satırdaki eşitliğini kanıtlayabiliriz. $\mathscr{S}$ imzasının tüm n-konumlu t_0 ve t_1 terimleri için,

$$\begin{aligned}
&h[(t_0 = t_1)^{\mathfrak{A}}]\\
&= \{h(\vec{a})\colon \vec{a} \in A^n \mathbin{\&} {t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = {t_1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})\}\\
&= \{h(\vec{a})\colon \vec{a} \in A^n \mathbin{\&} h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = h({t_1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))\} && [h \text{ birebirdir}]\\
&= \{h(\vec{a})\colon \vec{a} \in A^n \mathbin{\&} {t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})) = {t_1}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))\} && [(\dagger)]\\
&= \{\vec{b} \in B^n\colon A^n \text{ kuvvetinden bir } \vec{a} \text{ için,}\\
&\qquad\qquad h(\vec{a}) = \vec{b} \mathbin{\&} {t_0}^{\mathfrak{B}}(\vec{b}) = {t_1}^{\mathfrak{B}}(\vec{b})\}\\
&= \{\vec{b} \in B^n\colon {t_0}^{\mathfrak{B}}(\vec{b}) = {t_1}^{\mathfrak{B}}(\vec{b})\} && [h \text{ örtendir}]\\
&= t_0 = {t_1}^{\mathfrak{B}}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, S m-konumlu bir yüklem ise, o zaman

$$\begin{aligned}
&h[St_0 \cdots {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}]\\
&= \{h(\vec{a})\colon \vec{a} \in A^n \mathbin{\&} ({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in S^{\mathfrak{A}}\}\\
&= \{h(\vec{a})\colon \vec{a} \in A^n \mathbin{\&} (h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})), \dots, h({t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) \in S^{\mathfrak{B}}\}\\
&= \{h(\vec{a})\colon \vec{a} \in A^n \mathbin{\&} ({t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))) \in S^{\mathfrak{B}}\}\\
&= \{\vec{b} \in B^n\colon ({t_0}^{\mathfrak{B}}(\vec{b}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{B}}(\vec{b})) \in S^{\mathfrak{B}}\}\\
&= (St_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{B}}
\end{aligned}$$

olur. Bu şekilde, $\mathscr{S}$ imzasının her bölünemeyen φ formülü için, $(*)$ satırındaki eşitlik doğrudur. Eğer φ, ψ ile χ iken doğruysa, o zaman φ, $\neg\psi$ ile $\psi \lor \chi$ iken doğrudur, çünkü h fonksiyonunun birebir ve örten olması sayesinde

$$h[\neg\psi^{\mathfrak{A}}] = h[A^n \smallsetminus \psi^{\mathfrak{A}}] = B^n \smallsetminus h[\psi^{\mathfrak{A}}] = B^n \smallsetminus \psi^{\mathfrak{B}} = \neg\psi^{\mathfrak{B}},$$

$$h[\psi \vee \chi^{\mathfrak{A}}] = h[\psi^{\mathfrak{A}} \cup \chi^{\mathfrak{A}}] = h[\psi^{\mathfrak{A}}] \cup h[\chi^{\mathfrak{A}}] = \psi^{\mathfrak{B}} \cup \chi^{\mathfrak{B}} = \psi \vee \chi^{\mathfrak{B}}.$$

Benzer şekilde

$$h[\exists x_i\ \psi^{\mathfrak{A}}] = h[\pi_i^n[\psi^{\mathfrak{A}}]] = \pi_i^n[h[\psi^{\mathfrak{A}}]] = \pi_i^n[\psi^{\mathfrak{B}}] = \exists x_k\ \psi^{\mathfrak{B}}.$$

Dolayısıyla $(*)$ satırındaki eşitlik her durumda doğrudur. □

Bazı izomorfizimler, **ileri geri yöntemiyle** inşa edilebilir. Bu yöntemin iki örneğini vereceğiz.

5.1 Uçsuz yoğun doğrusal sıralamalar

Teorem 7. *$T^*_<$ teorisinin tüm boş olmayan sayılabilen modelleri, birbirine izomorftur.*

Kanıt. $(A, <)$ ile $(B, <)$, $T^*_<$ teorisinin iki boş olmayan sayılabilen modeli olsun. $(A, <)$ sıralanmış kümesinden $(B, <)$ sıralanmış kümesine bir f izomorfizmini inşa edeceğiz.

$$A = \{a_{2n} : n \in \omega\}, \qquad B = \{b_{2n+1} : n \in \omega\}$$

eşitliklerini varsayabiliriz. Her n için, B kümesinin bir b_{2n} elemanını ve A kümesinin bir a_{2n+1} elemanını seçeceğiz öyle ki $\{(a_n, b_n) : n \in \omega\}$ istediğimiz izomorfizim olacak.

Bir n için, her i ile j için, $i < j < 2n$ ise

$$a_i < a_j \text{ ancak ve ancak } b_i < b_j$$

koşulunu sağlayan a_i, a_j, b_i, ve b_j seçilmiş olsun. Yani, $(a_i : i < 2n)$ ve $(b_i : i < 2n)$ listelerinin sıralama tipleri birbiriyle aynı varsayılsın. O zaman Teorem 3'ün kanıtındaki gibi $(a_i : i < 2n + 2)$ ile $(b_i : i < 2n + 2)$ listelerinin sıralama tiplerinin birbiriyle aynı olduğu b_{2n} ile a_{2n+1} seçilebilir. □

Alıştırma 14. $\{1, <\}$ imzasında T, aksiyomları $T_<$ teorisinin aksiyomlarıyla

$$\forall x\ 1 \leqslant x,$$
$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (x < y \wedge (z \leqslant x \vee y \leqslant z)),$$
$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (1 < x \to (y < x \wedge (z \leqslant y \vee x \leqslant z)))$$

cümleleri olan teori olsun. T teorisinin tüm sayılabilen modelleri birbirine izomorf mudur?

5.2 Cebirsel kapalı cisimler

Cisimler teorisini

$$T_{\mathrm{c}}$$

olarak yazalım. Onun aksiyomları aşağıdaki cümlelerdir.

1. Değişmeli grup aksiyomları (yukarıdaki gibi).
2. $\{\,\cdot\,, 1\}$ imzasındaki değişmeli *monoid* aksiyomları, yani

$$\forall x\ \forall y\ x \cdot y = y \cdot x,$$
$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$
$$\forall x\ 1 \cdot x = x.$$

3. Dağılma aksiyomu:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

4. Çarpmaya göre tersler bulunur:

$$\forall x\ \exists y\ (x \neq 0 \to x \cdot y = 1).$$

Cebirsel kapalı cisimler teorisini

$$T_{\mathrm{c}}^*$$

olarak yazalım. Onun aksiyomları, T_c teorisinin aksiyomlarıyla, $\mathbb{N}$ kümesinden her n için,

$$\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}\, \exists y\; x_0 + x_1 \cdot y + \cdots + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + y^n = 0$$

cümlesidir.

Teorem 8. *Tüm aynı karakteristikli, sayılabilir sonsuz aşkınlık tabanlı cebirsel kapalı cisimler birbirine izomorftur.*

Kanıt. $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, aynı karakteristikli, sayılabilir sonsuz aşkınlık tabanlı cebirsel kapalı cisimler olsun.

$$A = \{a_{2n} \colon n \in \omega\}, \qquad B = \{b_{2n+1} \colon n \in \omega\}$$

eşitliklerini varsayabiliriz. Her n için, B kümesinin bir b_{2n} elemanını ve A kümesinin bir a_{2n+1} elemanını seçeceğiz öyle ki $\{(a_n, b_n) \colon n \in \omega\}$ istediğimiz izomorfizim olacak.

$\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$ cisimlerinin aynı $\mathbb{F}$ asal cismine sahip olduğu varsayılabilir. Bir n için, $i < 2n$ koşulunu sağlayan her i için

$$f_{2n}(a_i) = b_i$$

koşulunun sağlayan f_{2n}, $\mathbb{F}(a_i \colon i < 2n)$ cisminden $\mathbb{F}(b_i \colon i < 2n)$ cismine bir izomorfizim olsun.

1. Eğer a_{2n}, $\mathbb{F}(a_i \colon i < 2n)$ cismi üzerinde cebirselse,

$$c_0 + c_1 \cdot X + \cdots + c_{k-1} \cdot X^{k-1} + X^k$$

polinomu, a_{2n} elemanının minimal polinomu olsun. O zaman

$$f_{2n}(c_0) + f_{2n}(c_1) \cdot X + \cdots + f_{2n}(c_{k-1}) \cdot X^{k-1} + X^k$$

polinomunun $\mathfrak{B}$ cisminde bir çözümü vardır, buna b_{2n} diyelim.

2. $\mathbb{F}(b_i : i < 2n)$ cismi, $\mathbb{F}$ cisminin *sonlu* bir genişlemesidir; dolayısıyla $\mathfrak{B}$, $\mathbb{F}(b_i : i < 2n)$ cismi üzerinde cebirsel değildir. Eğer a_{2n}, $\mathbb{F}(a_i : i < 2n)$ cismi üzerinde aşkınsa, $\mathfrak{B}$ cisminin $\mathbb{F}(b_i : i < 2n)$ cismi üzerinde aşkın bir b_{2n} elemanını seçebiliriz.

Her durumda, $\mathbb{F}(a_k : k < 2n+1)$ cisminden $\mathbb{F}(b_k : k < 2n+1)$ cismine $f_{2n+1}(a_{2n}) = b_{2n}$ ve $f_{2n} \subseteq f_{2n+1}$ koşullarını sağlayan bir f_{2n+1} izomorfizmi yazmış olduk. Benzer şekilde $\mathbb{F}(a_k : k < 2(n+1))$ cisminden $\mathbb{F}(b_k : k < 2(n+1))$ cismine bir $f_{2(n+1)}$ izomorfizmi vardır. $\square$

Alıştırma 15. K sonlu bir cisim iken, T_K^* teorisinin tüm sayılabilen modellerinin birbirine izomorf olduğunu gösterin. İleri geri yöntemi burada yararlı mı?

6 Gömmeler

İmzaları $\mathscr{I}$ olan ve $A \subseteq B$ kapsamasını sağlayan $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, iki yapı olsun, ve $\mathscr{I}$ imzasındaki her S için

1) S değişmez ise $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}}$,
2) S n-konumlu işlem simgesiyse $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$,
3) S n-konumlu yüklem ise $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}} \cap A^n$

koşullarının olduğunu varsayalım. O zaman $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ **yapısının bir altyapısıdır.** Örneğin $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ yapısının bir altyapısıdır, ama $(\{0, \dots, n-1\}, \oplus)$, $(\mathbb{Z}, +)$ yapısının altyapısı değildir.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ yapısının bir altyapısı olsun; $\mathfrak{C}$, imzası aynı olan bir yapı olsun; ve h, $\mathfrak{C}$ yapısından $\mathfrak{A}$ yapısına bir izomorfizim olsun. O zaman h, C kümesinden B kümesine giden bir fonksiyon olarak, $\mathfrak{C}$ yapısının $\mathfrak{B}$ yapısına bir **gömmesidir.**

Örneğin $\mathfrak{M}$, girdilerinin $\mathbb{R}$ cisminden geldiği 2×2 matrisler halkası olsun. O zaman

$$x + y \cdot \mathrm{i} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

göndermesi, $\mathbb{C}$ cisminin $\mathfrak{M}$ halkasınına bir gömmesidir.

Teorem 9. *$\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, imzaları $\mathscr{I}$ olan iki yapı olsun, ve h, A kümesinden B kümesine giden bir fonksiyon olsun. O zaman h, $\mathfrak{A}$ yapısının $\mathfrak{B}$ yapısına bir gömmesidir ancak ve ancak her n için, $\mathscr{I}$ imzasının her n-konumlu niceleyicisiz φ formülü için,*

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}] = \varphi^{\mathfrak{B}} \cap h[A^n],$$

yani A^n kuvvetindeki her $\vec{a}$ için

$$\vec{a} \in \varphi^{\mathfrak{A}} \text{ ancak ve ancak } h(\vec{a}) \in \varphi^{\mathfrak{B}}.$$

Özellikle eğer h bir gömmeyse, $\mathscr{I}$ imzasının her niceleyicisiz σ cümlesi için, σ, $\mathfrak{A}$ yapısında doğrudur ancak ve ancak $\mathfrak{B}$ yapısında da doğrudur.

Alıştırma 16. Bu teoremi kanıtlayın.

Teoremle 4 ve 5, aşağıdaki teoremin özel durumudur.

Teorem 10. *$\mathscr{I}$, bir imza; $\mathfrak{A}$, imzası $\mathscr{I}$ olan bir yapı; ve T, $\mathscr{I}$ imzasının bir teorisi olsun. T tamdır, eğer*

(a) T, niceleyicilerin giderilmesine imkân verirse,
(b) $\mathfrak{A}$, T teorisinin tüm modellerine gömerse, ve
(c) A kümesi, boş değilse.

Alıştırma 17. Bu teoremi kanıtlayın.

Eğer h, imzası $\mathscr{I}$ olan $\mathfrak{A}$ yapısının $\mathfrak{B}$ yapısına bir gömmesiyse, ve ayrıca $\mathscr{I}$ imzasının her φ formülü için

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}] = \varphi^{\mathfrak{B}} \cap A^n$$

olursa, o zaman h **temel bir gömmedir.**

Teorem 11. *Eğer T, niceleyicilerin giderilmesine imkân verirse, o zaman T teorisinin modellerinin birbirine tüm gömmeleri temeldir, yani $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, T teorisinin modeliyse, ve h, $\mathfrak{A}$ yapısının $\mathfrak{B}$ yapısına bir gömmesiyse, o zaman h, temel bir gömmedir.*

Alıştırma 18. Bu teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 19.

a) $\{1, f\}$ imzasının T_0 teorisinin aksiyomları,

$$\forall x\, \forall y\, (fx = fy \to x = y),$$
$$\forall x\, \exists y\, (x = 1 \lor fy = x),$$
$$\forall x\, fx \neq 1$$

cümleleri olsun. T_0 teorisinin niceleyicilerin giderilmesine imkân verdiğini gösterin. T_0 teorisinin modellerinin tüm gömmelerinin temel olduğu sonucu çıkarın.

b) $\{f\}$ imzasının T_1 teorisinin aksiyomları,

$$\forall x\ \forall y\ (fx = fy \to x = y),$$
$$\exists z\ \forall x\ \exists y\ (x = z \lor fy = x),$$
$$\exists z\ \forall x\ fx \neq z$$

cümleleri olsun. T_1 teorisinin modellerinin temel olmayan bir gömmesini bulun.

c) $\{1, B\}$ imzasının T_2 teorisinin aksiyomları,

$$\forall x\ \exists y\ x\ B\ y,$$
$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x\ B\ y \land x\ B\ z \to y = z),$$
$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x\ B\ z \land y\ B\ z \to x = y),$$
$$\forall x\ \exists y\ (x = 1 \lor y\ B\ x),$$
$$\forall x\ \neg(x\ B\ 1)$$

cümleleri olsun. T_2 teorisinin niceleyicilerin giderilmesine imkân vermediğini gösterin. (Sayfa 40'ta Alıştırma 22'ye bakın.)

İmzaları $\mathscr{S}$ olan $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, iki yapı olsun, ve A kümesindeki her a için, B kümesinin bir b_a elemanı seçilsin. Aşağıdaki kurallarla, imzası $\mathscr{S}(A)$ olan bir $\mathfrak{C}$ yapısı tanımlıyoruz:

- $C = B$;
- $\mathscr{S}$ imzasındaki her S için, $S^{\mathfrak{C}} = S^{\mathfrak{B}}$,
- A kümesindeki her a için, $a^{\mathfrak{C}} = b_a$.

$\mathfrak{C}$ yapısı, $\mathfrak{B}$ yapısının $\mathscr{S}(A)$ imzasına bir **açılımıdır.** $\mathfrak{A}$ yapısının **diyagramı,** $\mathscr{S}(A)$ imzasının $\mathfrak{A}$ yapısında doğru olan tüm niceleyicisiz cümlelerin kümesidir.

Teorem 12. *İmzaları $\mathscr{S}$ olan $\mathfrak{A}$ ile $\mathfrak{B}$, iki yapı olsun. $\mathfrak{A}$ yapısının $\mathfrak{B}$ yapısına bir gömmesi vardır ancak ve ancak $\mathfrak{B}$ yapısının $\mathscr{S}(A)$ imzasına $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramının bir modeli olan bir açılımı vardır.*

Alıştırma 20. Bu teoremi kanıtlayın.

Teorem 13. *T bir teori olsun. O zaman T teorisinin modellerinin tüm gömmeleri temeldir ancak ve ancak T teorisinin her $\mathfrak{A}$ modeli için, T teorisinin ve $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramının cümleleri tam bir teorinin aksiyomlarıdır.*

Alıştırma 21. Bu teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 22. Teorem 11'in tersinin yanlış olduğunu gösterin. Mesela, Alıştırma 19'daki T_2 teorisinin modellerinin tüm gömmelerinin temel olduğunu gösterebilirsiniz.

7 Tıkızlık

Önsav. *$\mathscr{I}$, bir imza olsun; Γ, $\mathscr{I}$ imzasında bir cümleler kümesi olsun, ve σ, $\mathscr{I}$ imzasının bir cümlesi olsun. Γ kümesinin her sonlu altkümesinin bir modeli varsa, ya $\Gamma \cup \{\sigma\}$ kümesinin, ya da $\Gamma \cup \{\neg\sigma\}$ kümesinin her sonlu altkümesinin bir modeli vardır.*

Alıştırma 23. Bu önsavı kanıtlayın.

Bu sonuçla, Γ kümesinin modelinin var olduğu ispatlanır. Bu teoreme **Tıkızlık Teoremi** denir. Biz, özel bir durumu ispatlayacağız.

Teorem 14 (Tıkızlık)**.** *İmzası sayılabilen olan Γ cümleler kümesi için, eğer, her n için, Γ kümesinin her sonlu altkümesin n boyundan daha büyük modeli varsa, o zaman Γ kümesinin sayılabilen sonsuz bir modeli vardır.*

Kanıt. Γ kümesinin imzası $\mathscr{I}$ olsun; ω kümesindeki her n için, a_n, yeni bir değişmez olsun;

$$\Gamma_0 = \Gamma \cup \{a_m \neq a_n : m < n < \omega\}$$

olsun; ve $\mathscr{I} \cup \{a_n : n \in \omega\}$ imzasının tüm cümlelerinin kümesi, $\{\sigma_n : n \in \omega\}$ olsun. Her n için, Γ_n kümesini tanımlayacağız.

Γ_n kümesinin tanımlandığını varsayalım, ve o kümenin her sonlu altkümesinin bir modeli var olsun. Eğer $\Gamma \cup \{\sigma_n\}$ kümesinin de her sonlu altkümesinin bir modeli varsa, o zaman σ_n^* cümlesi, σ_n olsun. Öteki durumda, σ_n^* cümlesi, $\neg\sigma_n$ olsun.

Eğer σ_n^* cümlesi, $\exists x\ \varphi(x)$ biçiminde değilse, o zaman $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\sigma_n^*\}$ olsun. Öteki durumda a_ℓ değişmezinin $\Gamma \cup \{\sigma_n^*\}$ kümesinde bulunmadığı koşulunu sağlayan ℓ sayılarından en küçüğü, k olsun, ve

$$\Gamma_{n+1} \cup \{\sigma_n^*\} \cup \{\varphi(a_k)\}$$

olsun.

Şimdi $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$ olsun. Bu küme, $\mathscr{I} \cup \{a_n : n \in \omega\}$ imzasının tam bir teoridir. Bu olguyu kullanarak imzası $\mathscr{I}$ olan bir $\mathfrak{A}$ yapısını tanımlayacağız. A, $\{a_n : n \in \omega\}$ kümesi olacak. S, $\mathscr{I}$ imzasının bir elemanı olsun.

1. Eğer S bir değişmezse, o zaman $\exists x\ x = S$ cümlesi $\tilde{\Gamma}$ teorisinde bulunur, dolayısıyla bir (ve sadece bir) k için $a_k = S$ eşitliği de $\tilde{\Gamma}$ teorisinde bulunur. Şimdi $S^{\mathfrak{A}}$, a_k olarak tanımlanabilir.

2. Eğer S bir n-konumlu işlem simgesiyse, ve $\vec{b} \in A^n$ ise, o zaman bir (ve sadece bir) k için, $Sb_0 \cdots b_{n-1} = a_k$ eşitliği $\tilde{\Gamma}$ kümesinde bulunur, ve $S^{\mathfrak{A}}(\vec{b})$, a_k olarak tanımlanır.

3. Eğer S bir n-konumlu yüklemse, o zaman $S^{\mathfrak{A}}$, A^n kuvvetinin öyle $\vec{b}$ elemanlarının kümesi olarak tanımlanır ki $Sb_0 \cdots b_{n-1}$ cümlesi $\tilde{\Gamma}$ teorisinde bulunur.

O zaman $\mathfrak{A}$, Γ kümesinin bir modelidir. □

Alıştırma 24. Tıkızlık Teoreminin kanıtında $\mathfrak{A}$ yapısının Γ kümesinin bir modeli olduğunu gösterin.

7.1 Tamlık

Tıkızlık Teoremi, Teorem 5 için, yeni bir kanıt sağlar. $T_<^*$ teorisinin tam olmadığını varsayalım. O zaman bir σ cümlesi için, hem $T_<^* \cup \{\neg\sigma\}$ hem $T_<^* \cup \{\sigma\}$ kümesinin modelleri vardır. Yukarıdaki ispata göre, bu modeller *sayılabilen* olabilir. Bu durumda, bu modeller birbirine izomorftur. Ancak izomorf yapılarda, aynı cümleler doğrudur. Bu bir çelişkidir. O zaman $T^*_<$ tamdır.

T^*_{c} teorisi, tam değildir, çünkü ne $1+1 \neq 0$ cümlesini ne $1+1=0$ cümlesini gerektirir. Ancak p, ya asal bir sayı ya da 0 olsun, ve

$$T^*_p,$$

karakteristikleri p olan cebirsel kapalı cisimler teorisi olsun.

Teorem 15. *T^*_p teorisi tamdır.*

Kanıt. T^*_p tam olmasın, ve hem $T^*_p \cup \{\neg\sigma\}$ hem $T^*_p \cup \{\sigma\}$ kümelerinin modelleri olsun. $\mathfrak{A}$, $T^*_p \cup \{\neg\sigma\}$ kümesinin bir modeli olsun. Şimdi her n için, c_n, yeni bir değişmez olsun. Ondan sonra, her n için, Γ_n, tüm

$$f(c_0, \dots, c_{n-1}) \neq 0$$

formüllerinin kümesi olsun, öyle ki f, katsayıları $\mathbb{Z}$ kümesinden olan, 0 olmayan bir polinomdur. $\Gamma = \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$ olsun. Eğer Δ, Γ kümesinin sonlu bir altkümesiyse, o zaman $\mathfrak{A}$ yapısının, $T^*_p \cup \Delta$ kümesinin modeli olan bir $\mathfrak{B}$ açılımını oluşturacağız. Δ kümesi sonlu olduğundan bir M için, Δ kümesinde her $f(c_0, \dots, c_{n-1}) \neq 0$ formülü için, $n \leqslant M$ olur, ve o zaman B kümesinde

$$f({c_0}^{\mathfrak{B}}, \dots, {c_{n-1}}^{\mathfrak{B}}) \neq 0$$

koşullarını sağlayan ${c_k}^{\mathfrak{B}}$ elemanlarını seçebiliriz.

Tıkızlık Teoremine göre, $T^*_p \cup \{\neg\sigma\} \cup \Gamma$ kümesinin sayılabilen bir $\mathfrak{C}$ modeli vardır. Benzer şekilde, $T^*_p \cup \{\sigma\} \cup \Gamma$ kümesinin sayılabilen bir $\mathfrak{D}$ modeli vardır. O zaman Teorem 8'e göre, cisimler olarak, $\mathfrak{C}$ ile $\mathfrak{D}$ izomorftur; Teorem 6'ya göre, bu cisimler birbirine temelce denktir. Bu bir çelişkidir, çünkü σ, $\mathfrak{C}$ yapısında yanlış, $\mathfrak{D}$ yapısında doğrudur. $\square$

Mesela T^*_0 teorisi, $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$ cisminin teorisidir.

$T_{c,<}$, sıralanmış cisimler teorisi olsun. Onun aksiyomları, T_c ve $T_<$ teorilerinin aksiyomlarıyla

$$\forall x\, \forall y\, (0 < x \wedge 0 < y \to 0 < x + y \wedge 0 < x \cdot y).$$

cümlesidir.

$T^*_{c,<}$, gerçel kapalı sıralanmış cisimler teorisi olsun. Onun aksiyomları, $T_{c,<}$ teorisinin aksiyomlarıyla,

$$\forall x\, \exists y\, (0 < x \to y^2 = x)$$

ve, her n için,

$$\forall x_0\, \cdots \forall x_{2n}\, \exists y\; x_0 + x_1 \cdot y + \cdots + x_{2n} \cdot y^{2n} + y^{2n+1} = 0.$$

Teorem 16. *$T^*_{c,<}$ teorisi, tamdır; özellikle,* $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1, <)$ *sıralanmış cisminin teorisidir.*

Bu teorem, Teorem 15 gibi kanıtlanamaz; onu kanıtlamayacağız.

7.2 Niceleyicilerin giderilmesi

İmzası $\mathscr{I}$ olan $\mathfrak{B}$, bir yapı olsun, ve $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ veya $\vec{a}$, B kümesinin elemanlarının sonlu bir listesi olsun. O zaman $\mathfrak{B}$ yapısının öyle bir $\mathfrak{A}$ altyapısı vardır ki B kümesinin her b elemanı için, $b \in A$ ancak ve ancak $\mathscr{I}$ imzasının n-konumlu bir t terimi için,

$$b = t^{\mathfrak{B}}(\vec{a}).$$

$\mathfrak{A}$ yapısı, $\mathfrak{B}$ yapısının **sonlu üreteçli** bir altyapısıdır. Bu altyapı,

$$\langle \vec{a} \rangle_{\mathfrak{B}}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 17. *Bir T teorisi niceleyicilerin giderilmesine imkân verir ancak ve ancak T teorisinin her $\mathfrak{B}$ modeli için, $\mathfrak{B}$ yapısının sonlu üreteçli, boş olmayan her $\mathfrak{A}$ altyapısı için, T teorisinin ve $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramının birleşimi, tam bir teori için bir aksiyom kümesidir.*

Kanıt. T, niceleyicilerin giderilmesine imkân versin. $\mathfrak{B}$ yapısının, T teorisinin bir modeli olduğunu varsayalım, ve $\langle\vec{a}\rangle$ veya $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ yapısının boş olmayan bir altyapısı olsun. O zaman $\mathscr{I}(A)$ imzasının her cümlesi, $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramına göre, φ formülünün imzasının $\mathscr{I}$ olduğu bir $\varphi(\vec{a})$ formülüne denktir. Ayrıca φ, T teorisine göre, niceleyicisiz bir ψ formülüne denktir. $\varphi(\vec{a})$ cümlesinin $\mathfrak{B}$ yapısında doğru olduğunu varsayalım. Teorem 9'a göre $\psi(\vec{a})$, $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramının bir elemanıdır; ve T teorisine göre, $\varphi(\vec{a})$ ile $\psi(\vec{a})$, birbirine denktir. O zaman T ile $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramı, $\varphi(\vec{a})$ cümlesini gerektirir.

Tam tersine T teorisinin her $\mathfrak{B}$ modeli için, $\mathfrak{B}$ yapısının sonlu üreteçli, boş olmayan her $\mathfrak{A}$ altyapısı için, T teorisinin ve $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramının birleşiminin, tam bir teori için bir aksiyom kümesi olduğunu varsayalım. $\varphi(\vec{x}, y)$, $\mathscr{I}$ imzasının niceleyicisiz bir formülü olsun. $\mathfrak{B}$ yapısının T teorisinin bir modeli olduğunu varsayalım, ve B^n kuvvetindeki bir $\vec{a}$ için, $\exists y\ \varphi(\vec{a}, y)$ cümlesi, $\mathfrak{B}$ yapısında doğru olsun. $\mathfrak{A} = \langle\vec{a}\rangle_{\mathfrak{B}}$ olsun. Varsayımımız sayesinde T teorisinin ve $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramının birleşimi, $\exists y\ \varphi(\vec{a}, y)$ cümlesini gerektirir. Tıkızlık Teoremi sayesinde $\mathfrak{A}$ yapısının diyagramının sonlu bir Δ altkümesi için, $T \cup \Delta$ kümesi, $\exists y\ \varphi(\vec{a}, y)$ cümlesini gerektirir. $\Delta = \{\psi_0(\vec{a}), \dots, \psi_{m-1}(\vec{a})\}$ olsun, ve ψ, $\bigvee_{i<m} \psi_i$ olsun. O zaman $\psi(\vec{a}) \in \Delta$ olur. Yeni bir $\vec{c}$ değişmez listesi için T,

$$\psi(\vec{c}) \to \exists y\ \varphi(\vec{c}, y)$$

cümlesini gerektirir.

Γ, öyle $\psi(\vec{c})$ formüllerinin kümesi olsun ki ψ, $\mathscr{I}$ imzasının niceleyicisiz bir formülü olsun ve T, $\psi(\vec{c}) \to \exists y\ \varphi(\vec{c}, y)$ cümlesini gerektirsin. O zaman

$$T \cup \{\neg\psi(\vec{c}) \colon \psi(\vec{c}) \in \Gamma\} \cup \{\exists y\ \varphi(\vec{c}, y)\}$$

kümesinin hiç bir modeli yoktur. Tıkızlık Teoremi sayesinde Γ kümesinin sonlu bir $\{\psi_0(\vec{c}), \ldots, \psi_{m-1}(\vec{c})\}$ altkümesi için

$$T \cup \{\neg\psi_0(\vec{c}), \ldots, \neg\psi_{m-1}(\vec{c})\} \cup \{\exists y\ \varphi(\vec{c}, y)\}$$

kümesin modeli yoktur. T teorisine göre, $\exists y\ \varphi(\vec{x}, y)$ ile $\bigvee_{i<m} \psi_i(\vec{x})$ formülleri, birbirine denktir. $\square$

Teorem 18. *T_{c}^* teorisi, niceleyicilerin giderilmesine imkân verir.*

Alıştırma 25. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma 26. $(\mathbb{C}, +, -, \cdot\,)$ yapısında $\mathbb{R}$ kümesinin tanımlanamadığını gösterin. (Sayfa 13'teki Alıştırma 2 ile karşılaştırın.)

Teorem 19. *$T_{\mathrm{c},<}^*$ teorisi, niceleyicilerin giderilmesine imkân verir.*

Teorem 16 gibi, bu teoremi de kanıtlamayacağız.

Alıştırma 27. $(\mathbb{R}, +, -, \cdot\,, <)$ yapısında $\mathbb{Z}$ kümesinin tanımlanamadığını gösterin.

Kaynakça

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson. *Models and ultraproducts: An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969. reissued by Dover, 2006.

[2] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990. first edition, 1973.

[3] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü.* Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[4] Teo Grünberg and Adnan Onart. *Mantık Terimleri Sözlüğü.* Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[5] Roe-Merrill S. Heffner. *Brief German Grammar.* D. C. Heath and Company, Boston, 1931.

[6] Wilfrid Hodges. *Model theory*, volume 42 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[7] Annalisa Marcja and Carlo Toffalori. *A guide to classical and modern model theory*, volume 19 of *Trends in Logic—Studia Logica Library.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[8] David Marker. *Model theory: an introduction*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[9] Ali Nesin. *Analiz IV.* Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2011.

[10] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles.* Bruno Poizat, Lyon, 1985. Une introduction à la logique mathématique contemporaine. [An introduction to contemporary mathematical logic].

[11] Bruno Poizat. *A course in model theory.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction to contemporary mathematical logic, Translated from the French by Moses Klein and revised by the author.

[12] Philipp Rothmaler. *Introduction to model theory*, volume 15 of *Algebra, Logic and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000. prepared by Frank Reitmaier, translated and revised from the 1995 German original by the author.

[13] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A Course in Model Theory*, volume 40 of *Lecture Notes in Logic.* Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA, 2012.

Dizin

H

İ

K

M

N

S

T

Y

Simgeler

Tablo 1: Teoriler

Simge	sayfa
T_K	15
T_K^*	17
$T_<$	24
$T_<^*$	24
T_c	34
T_c^*	34
T_p^*	43
$T_{\mathrm{c},<}$	44
$T_{\mathrm{c},<}^*$	44

Tablo 2: Özel Simgeler ve İfadeler

Simge	sayfa
$\mathbb{N}$	6
ω	7
$\neg$	9
$\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$	9
$\exists$, $\forall$	9
$\varphi^{\mathfrak{A}}$	9
π_i^n	10
$\operatorname{Tan}^n(\mathfrak{A})$	11
x_k	18
$ft_0 \cdots t_{m-1}$	18
$t_0 = t_1$	19
$Rt_0 \cdots t_{m-1}$	19
$\neg\varphi$	20
$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$	20
$\exists x_k\ \varphi$, $\forall x_k\ \varphi$	20
$\mathrm{sd}(\varphi)$	20
$\mathfrak{A} \models \sigma$	21
$\mathfrak{A} \not\models \sigma$	21
$\mathfrak{A} \models \Gamma$	21

Tablo 3: Yunan Harfleri

büyük harf	minüskül	çeviri	ad
A	α	a	alpha
B	β	b	beta
Γ	γ	g	gamma
Δ	δ	d	delta
E	ε	e	epsilon
Z	ζ	z	zeta
H	η	ê	eta
Θ	ϑ	th	theta
I	ι	i	iota
K	$\varkappa$	k	kappa
Λ	λ	l	lambda
M	μ	m	mu
N	ν	n	nu
Ξ	ξ	x	xi
O	o	o	omikron
Π	π	p	pi
P	ρ	r	rho
Σ	σ, ς	s	sigma
T	τ	t	tau
Υ	υ	y, u	upsilon
Φ	φ	ph	phi
X	χ	ch, kh	chi
Ψ	ψ	ps	psi
Ω	ω	ô	omega

Tablo 4: Alman Harfleri (yazılı biçimleri Heffner'in kitabından)

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg
Hh Ii Jj Kk Ll Mm Nn
Oo Pp Qq Rr Ss Tt Uu
Vv Ww Xx Yy Zz