

Modeller kuramı alıştırmaları

David Pierce

6 Nisan 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ

Alıştırma 1. Herhangi formülde sol ayraç sayısının, sağ ayraç sayısına eşit olduğunu gösterin.

Alıştırma 2. $\{<\}$ imzasında $T_{<}$, doğrusal sıralamalar teorisi olsun, ve T , aksiyomları $T_{<}$ teorisinin aksiyomları ile

$$\begin{aligned} \forall x \exists y \forall z (x < y \wedge (z \leq x \vee y \leq z)), \\ \forall x \exists y \forall z (y < x \wedge (z \leq y \vee x \leq z)) \end{aligned}$$

olan teori olsun. $\{<\}$ imzasında, T teorisine göre niceleyicisiz formüle denk *olmayan* bir $\varphi(x, y)$ formülünü verin.

Alıştırma 3. Eđer $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$ ise

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$$

elemanter kapsanmasını gösterin.

Alıştırma 4. $T_{<}^*$, uçsuz yoğun doğrusal sıralamalar teorisi olsun. Aşağıdaki her formül için serbest değişkenleri aynı olan ve $T_{<}^*$ teorisine göre denk olan niceleyicisiz formülü bulun.

- $\exists y (x < y)$,
- $\exists z (x < z \wedge z < y)$,
- $\exists z (x < z \wedge y < z)$,
- $\exists y (x_0 = y \wedge x_1 < y \wedge x_1 < x_2)$.

Alıştırma 5. İmzası $\{E\}$ olan $T_{2,\infty}$ teorisinin her \mathfrak{A} modeli için $E^{\mathfrak{A}}$, iki sınıflı denklik bağıntısıdır, ve bu bağıntının her sınıf sonsuzdur.

- a) $T_{2,\infty}$ için aksiyomları yazın.
- b) Aşağıdaki her formül için serbest değişkenleri aynı olan ve $T_{2,\infty}$ teorisine göre denk olan niceleyicisiz formülü bulun.
 - i. $\exists z \neg(x E z \vee y E z)$,
 - ii. $\exists y (x_0 E y \wedge x_1 E y \wedge \neg x_2 E y)$.
 - iii. $\exists y (x_0 E y \wedge x_1 E y \wedge \neg x_2 E y \wedge x_0 \neq y)$.

Alıştırma 6. φ ve ψ niceleyicisiz ise $\exists x \varphi \rightarrow \forall x \psi$ formülünü önekli biçimde (yani niceleyicilerin önde olduğu biçimde) yazın.

Alıştırma 7. Verilen kümelerin ve bağıntıların verilen yapılar da tanımlanabildiğini gösterin.

- a) $\{\text{tek sayılar}\}, (\mathbb{Z}, +)$ 'da
- b) $\{0\}, (\mathbb{Z}, \times)$ 'da
- c) $\{0\}, (\omega, <)$ 'te
- d) $\{(x, y) \in \omega^2 : y - x = 2\}, (\omega, <)$ 'te
- e) $\{\text{bileşik sayılar}\}, (\mathbb{N}, \times, 1)$ 'de
- f) $\{\text{pozitif sayılar}\}, (\mathbb{Z}, \times, 1)$ 'de
- g) $[3, 5]$ aralığı, $(\mathbb{R}, +, \times)$ 'da
- h) bir grubun, mertebesi 2 olan elemanları kümesi, grupta
- i) bir G grubunun $Z(G)$ merkezi (yani her elemanla değişen elemanlar kümesi), G 'de
- j) $\{(x, y) \in G^2 : xZ(G) = yZ(G)\}$, bir G grubunda
- k) üçtane elemana denk olan elemanlar kümesi, denklik bağıntısıyla donatılmış bir kümede
- l) $\{\text{asal sayılar}\}, (\mathbb{N}, |)$ 'de
- m) $\bigcup_{p \text{ asal}} \{p^k : k \in \omega\}, (\mathbb{N}, |)$ 'de
- n) $\mathbb{Z}, (\mathbb{C}, +, \times, \exp)$ 'te