Modeller Kuramı (TASLAK)

David Pierce

23 Mart 2017

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

Önsöz

Bildiğim ve kullandığım modeller kuramı kitapları ilk yayım tarihlerine göre aşağıda sıralanmıştır.

1956 Robinson *Complete Theories* [13]
1963 Robinson *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra* [12]
1965 Robinson *Non-standard Analysis* [14]
1967 Shoenfield *Mathematical Logic* [16]
1969 Bell & Slomson *Models and Ultraproducts: An Introduction* [1]
1973 Chang & Keisler *Model Theory* [2]
1985 Poizat *Cours de théorie des modèles* [11, 10]
1993 Hodges *Model Theory* [6]
1995 Rothmaler *Introduction to Model Theory* [15]
2002 Marker *Model Theory: An introduction* [8]
2003 Marcja & Toffalori *A Guide to Classical and Modern Model Theory* [7]
2012 Tent & Ziegler *A Course in Model Theory* [19]

Türkçe ifadelerde yardım ettiği için Ayşe Berkman'a teşekkür ederim. Ali Nesin'in *Analiz IV* kitabını da [9] matematiksel Türkçe örneği olarak kullandım. Bazı terimler, Grünberg ile Onart [4] ve Demirtaş [3] tarafından yazılmış kitaplardan alınmıştır.

1. Doğal sayılar

Çoğunlukla sıralı bir n-li $(a_1, \ldots, a_n)$ olarak yazılır, ama bu metinde $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ tercih ediliyor.

Tanıma göre ω, öyle ξ kümelerinin en küçüğüdür ki

1) $\varnothing \in \xi$, ve

2) her α kümesi için $\alpha \in \xi$ ise $\alpha \cup \{\alpha\} \in \xi$.
O zaman ω, **doğal sayılar kümesidir.** Özel olarak

$$0 = \varnothing, \qquad 1 = \{0\}, \qquad 2 = \{0, 1\}, \qquad 3 = \{0, 1, 2\},$$

ve genelde $n \in \omega$ ise

$$n = \{0, \dots, n-1\}.$$

Her A kümesi için A^n kuvveti, elemanları n'den A'ya giden göndermeler olan kümedir. Bu şekilde A^n kuvvetinin aynı elemanı,

$$\vec{a}, \qquad (a_0, \dots, a_{n-1}), \qquad (a_i \colon i < n), \qquad i \mapsto a_i$$

biçimlerinde yazılabilir. Özel olarak

$$A^0 = \{\varnothing\} = \{0\} = 1.$$

$\omega \smallsetminus \{0\}$ kümesi, $\mathbb{N}$ **sayma sayıları kümesidir.**

2. İmzalar ve yapılar

2.1. İmzalar

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar sıralanmış cisminin *imzası,*

$$\{+, 0, -, \times, 1, <\}$$

kümesidir. Burada
- 0 ve 1, *değişmezdir;*
- $+$ ve $\times$, 2-*konumlu işlem simgeleridir;*
- $-$, 1-konumlu işlem simgesidir;
- $<$, 2-konumlu *yüklemdir.*

Genelde bir **imzanın** her elemanı,

1) ya **değişmezdir,**
2) ya da bir n sayma sayısı için
    a) ya n-konumlu bir **işlem simgesidir,**
    b) ya da n-konumlu bir **yüklemdir.**

Bu metinde $\dot{\mathscr{I}}$ her zaman bir imza olacak.

2.2. Yapılar

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar sıralanmış cismi bir *yapıdır.* İmzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan bir **yapı,** öyle bir $(A, S \mapsto S^{\mathfrak{A}})$ sıralı ikilisidir ki

1) A bir kümedir, ve
2) $S \mapsto S^{\mathfrak{A}}$, tanım kümesi $\dot{\mathscr{I}}$ olan bir göndermedir, ve
    a) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her d değişmezi için
    $$d^{\mathfrak{A}} \in A;$$
    b) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her n-konumlu F işlem simgesi için
    $$F^{\mathfrak{A}} \colon A^n \to A,$$
    yani $F^{\mathfrak{A}}$, A'da n-konumlu bir **işlemdir;**
    c) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her n-konumlu R yüklemi için
    $$R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n,$$
    yani $R^{\mathfrak{A}}$, A'da n-konumlu bir **bağıntıdır.**

$(A, S \mapsto S^{\mathfrak{A}})$ yapısı, sadece $\mathfrak{A}$ olarak yazılabilir. Bu yapının **evreni,** A'dır. $\dot{\mathscr{I}}$'nin her S elemanı için $S^{\mathfrak{A}}$, S'nin $\mathfrak{A}$'daki **yorumudur.** İmzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan yapılar

$$\mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$$

sınıfını oluşturur.

Eğer $\dot{\mathscr{I}} = \{S_0, S_1, \dots\}$ ise $\mathfrak{A}$, $(A, {S_0}^{\mathfrak{A}}, {S_1}^{\mathfrak{A}}, \dots)$ olarak yazılabilir. Eğer farklı bir yapı $\mathfrak{A}$'nın evrenini kullanmazsa $\mathfrak{A}$, $(A, S_0, S_1, \dots)$ olarak yazılabilir. Normalde bir $\mathfrak{B}$ yapısının evreni B, ve saire (sayfa 29'a bakın); ama tutarlı olmak zor veya imkânsızdır.

Örnek 1. Gerçel sayılar kümesi R ise, o zaman gerçel sayılar sıralanmış cismi $(R, +^{\mathfrak{R}}, 0^{\mathfrak{R}}, -^{\mathfrak{R}}, \times^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}})$; ama normalde $\mathbb{R}$ ifadesi hem küme hem de sıralanmış cisim için kullanılır.

2.3. Örnekler

1. Aşağıdaki yapı örnekleri matematikte sık sık kullanılıyor.

a) $(\mathbb{C}, +, 0, -, \times, 1)$ karmaşık sayılar cismi.

b) p asal olmak üzere p-elemanlı $(\mathbb{F}_p, +, 0, -, \times, 1)$ cismi.

c) $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \times, 1, <)$ kesirli sayılar sıralanmış cismi.

d) Bir $(G, \times, \mathrm{e}, {}^{-1})$ grubu.

e) $(\mathbb{Q}, +, 0, -)$ abelyan grubu.

f) $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ tamsayılar abelyan grubu.

g) $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \times, 1)$ tamsayılar değişmeli halkası.

h) $(\mathbb{Q}, <)$ kesirli sayılar doğrusal sırası.

i) $(\omega, <)$ doğal sayılar doğrusal sırası.

j) $(\mathbb{N}, \mid\,)$ parçalı sırası.

2. Bir $(K, +, 0, -, \times, 1)$ cismi verilirse

$$\mathrm{Mat}^{2\times 2}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 \\ x_0^1 & x_1^1 \end{bmatrix} : x_j^i \in K \right\}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $(\mathrm{Mat}^{2\times 2}(K), +, 0, -, \times, I)$ değişmeli olmayan matrisler halkası elde edilebilir.

3. Bir Ω kümesinin altkümeleri

$$\mathscr{P}(\Omega)$$

kuvvet kümesini oluşturur, ve bu kümeden

a) $(\mathscr{P}(\Omega), \subseteq)$ parçalı sırası,

b) $(\mathscr{P}(\Omega), \cup, \varnothing, \cap, \Omega, ')$ **Boole cebiri**

elde edilir.

4. Herhangi küme, imzası boş olan bir yapıdır.

5. Eğer E, bir A kümesinde bir denklik bağıntısı ise, o zaman (A, E) sıralı ikilisi bir yapıdır. Bu durumda $b \in A$ ise b'nin $\{x \in A \colon x \mathrel{E} b\}$ denklik sınıfı $[b]$ olarak yazılabilir. O zaman tanıma göre

$$A/E = \{[x] \colon x \in A\}.$$

6. $n \in \mathbb{N}$ ise n modülüne göre kalandaşlık, $\mathbb{Z}$'de bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda $\mathbb{Z}_n = \{[x] \colon x \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \times)$$

değişmeli halkası elde edilir.

7. Eğer K bir cisim ise, o zaman K üzerinde vektör uzaylarının imzası

$$\{+, \mathbf{0}, -\} \cup \{F_a \colon a \in K\}$$

olarak alınabilir. Şimdi $\mathfrak{V}$, K üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\boldsymbol{u} \in V$ ise, o zaman tanıma göre

$$F_a{}^{\mathfrak{V}}(\boldsymbol{u}) = a \cdot \boldsymbol{u}.$$

Her n sayma sayısı için $\mathfrak{V}$'nin imzasına yeni n-konumlu bir $\|_n$ yüklemi eklenebilir, ve bu simgenin $\mathfrak{V}$'deki yorumu, n-konumlu doğrusal bağımlılık olabilir. Bu şekilde $(\boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_{n-1}) \in \|_n{}^{\mathfrak{V}}$ ancak ve ancak K'nin, biri 0 olmayan bazı a_i elemanları için

$$F_{a_0}{}^{\mathfrak{V}}(\boldsymbol{u}_0) + \dots + F_{a_{n-1}}{}^{\mathfrak{V}}(\boldsymbol{u}_{n-1}) = \mathbf{0}.$$

O zaman $(V, \|_1, \|_2, \|_3, \dots)$ yapısı incelenebilir.

8. Tekrar K bir cisim olsun, ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman K^{n+1} kuvveti, bir V iç çarpım uzayı olarak anlaşılabilir. V'nin her $\boldsymbol{a}$ elemanı $\begin{bmatrix} a^0 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$ sütun vektörü olarak alınsın. Eğer V^n kuvvetinin $(\boldsymbol{a}_j \colon j < n)$ elemanı verilirse, $i \leqslant n$ olmak üzere

$$A_i = \begin{bmatrix} a^0_0 & \cdots & a^0_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{a^i_0} & \cdots & \widehat{a^i_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_0 & \cdots & a^n_{n-1} \end{bmatrix}$$

olsun. Yani $n \times (n-1)$'lik $(\boldsymbol{a}_0 \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{n-1})$ matrisinin i'ninci satırı silinirse kare A_i matrisi elde edilsin. Şimdi

$$X(\boldsymbol{a}_j \colon j < n) = \begin{bmatrix} \det(A_0) \\ \vdots \\ (-1)^j \det(A_j) \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \det(A_n) \end{bmatrix}$$

olsun. Bu şekilde V'nin her $\boldsymbol{u}$ elemanı için

$$\boldsymbol{u} \cdot X(\boldsymbol{a}_j \colon j < n) = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{a}_0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Burada X, V'de n-konumlu işlemdir. Eğer $n = 2$ ise $X(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, normal $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ çapraz çarpımıdır [18].

3. İfadeler

3.1. Terimler

Her n doğal sayısı için

$$x_n$$

simgesi **değişken** olarak anlaşılsın. Bunların yerine x, y, z falan kullanılabilir. Şimdi, her imzada, *özyinelemeyle,* **terimler** tanımlar:

1) Her değişken, bir terimdir.
2) her değişmez bir terimdir;
3) her m sayma sayısı için, her m-konumlu F işlem simgesi için, tüm t_0, ..., t_{m-1} terimleri için,

$$Ft_0 \cdots t_{n-1}$$

   ifadesi de terimdir.

Normalde $n = 2$ durumunda Ft_0t_1 ifadesinin yerine $(t_0\ F\ t_1)$ kullanılır.

Terimlerin tanımı özyinelemeli olduğundan tümevarımlı kanıtlar mümkündür: Bir imzada, bir A kümesi

1) her değişken içerirse,
2) her değişmez içerirse,
3) her m sayma sayısı için, her m-konumlu F işlem simgesi için, A'nın zaten t_0, ..., t_{m-1} terimlerini içerdiği $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimini içerirse,

o zaman A, her terimi içerir.

Hiçbir değişkenin gözükmediği terim **sabittir.** Sabit terimlerin tanımı da özyinelemeli biçimde konulabilir:

Teorem 1. *Bir imzada, bir A kümesi*

1) her değişmez içersin;

2) her m sayma sayısı için, her m-konumlu F işlem simgesi için, A'nın zaten $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimlerini içerdiği $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimi içersin.

O zaman A, her sabit terim içerir.

Kanıt. İmzanın sabit olmayan terimleriyle A'nın elemanları, B kümesini oluştursun. Kısaca

$$B = A \cup \{\text{sabit olmayan terimler}\}.$$

1. Her değişken, sabit olmadığından B'dedir.
2. Her değişmez, sabit olduğundan A'dadır, dolayısıyla B'dedir.
3. $m \in \mathbb{N}$ ve F, m-konumlu bir işlem simgesi olsun, ve $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimleri B'de olsun. Bu terimlerin her biri ya sabit değildir ya da A'dadır. Biri sabit değilse $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimi de sabit değildir, dolayısıyla bu terim B'dedir. Eğer $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimlerinin her biri A'da ise, o zaman varsayıma göre $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimi de A'dadır, dolayısıyla bu terim B'dedir.

Tümevarımdan B her terim içerir. Özel olarak A, her sabit terim içerir. □

Eğer t, $\dot{\mathscr{I}}$'nin sabit bir terimiyse, ve $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$ ise, t'nin $\mathfrak{A}$'daki $t^{\mathfrak{A}}$ *yorumunu* tanımlamak isteriz. Eğer t bir değişmez ise, o zaman $t^{\mathfrak{A}}$ zaten tanımlandı. Genel tanım özyinelemeli olacak, ama yapabilmemiz için bir teorem gerekir.

Teorem 2. *Eğer $t_0, \ldots, t_{m-1}$, $u_0, \ldots, u_{m-1}$ terim ise, ve $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ ve $Fu_0 \cdots u_{m-1}$ terimleri birbiriyle aynı ise, o zaman m'nin her k elemanı için t_k ve u_k aynıdır.*

Kanıt. Tümevarımla her terim için hem sonuna yeni simgeler ekleyerek, hem de sonundan simgeler kaldırarak yeni bir terim elde etmeyeceğiz. Bunu göstermek yeter... □

Şimdi $t^{\mathfrak{A}}$ yorumuna özyinelemeli bir tanım verilebilir:

1. t değişmez ise dediğimiz gibi $t^{\mathfrak{A}}$ zaten tanımlandı.
2. Eğer t, $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ biçimindeyse ve ${t_k}^{\mathfrak{A}}$ yorumları tanımlanırsa

$$(Ft_0 \cdots t_{n-1})^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}, \dots, {t_{n-1}}^{\mathfrak{A}}).$$

Her durumda $t^{\mathfrak{A}} \in A$. (Bunun kanıtı tümevarımla verilebilir.)

Örnek 2. Her durumda ${t_k}^{\mathbb{F}_p} = 1$ ise

$$(\cdots(t_0 + t_1) + \cdots + t_{p-1})^{\mathbb{F}_p} = 0.$$

3.2. Formüller

Değişkenler ve değişmezler, "bölünemez" terimlerdir, ama normalde bu şekilde konuşmuyoruz. Yine de **bölünemez formüllerin** iki çeşiti vardır:

1. Eğer t ve u terim ise, o zaman

$$t = u$$

   denklemi bölünemez bir formüldür.
2. Eğer R, m-konumlu yüklem ise, ve t_0, …, t_{m-1} terim ise, o zaman

$$Rt_0 \cdots t_{m-1}$$

   ifadesi bölünemez bir formüldür.

Bu tanım, özyinelemeli değildir. Ama **formüllerin** tanımı, özyinelemelidir:

1) (Tabii ki) her bölünemez formül, bir formüldür.
2) φ ve ψ formül ise

$$(\varphi \wedge \psi)$$

   de formüldür.

3) φ formül ise

$$\neg\varphi$$

de formüldür.

4) φ formül ve x değişken ise

$$\exists x\ \varphi$$

de formüldür.

Formüller için Teorem 2 gibi bir teorem doğrudur, dolayısıyla formüller kümesinde aşağıdaki gibi özyinelemeli tanımlar yapılabilir:

1) φ bölünemez ise

$$\mathrm{sd}(\varphi),$$

φ'de gözüken değişkenlerin oluşturduğu kümedir.

2) $\mathrm{sd}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{sd}(\varphi) \cup \mathrm{sd}(\psi)$.
3) $\mathrm{sd}(\neg\varphi) = \mathrm{sd}(\varphi)$.
4) $\mathrm{sd}(\exists x\ \varphi) = \mathrm{sd}(\varphi) \smallsetminus \{x\}$.

$\mathrm{sd}(\varphi)$ kümesinin elemanları, φ'nin **serbest değişkenleridir.**

3.3. Doğruluk

Hiç serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** $\dot{\mathscr{I}}$ imzasının her cümlesi, imzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan her yapında ya *yanlıştır* ya da *doğrudur.* Bu koşulların tanımlanması için daha fazla kavramlar gerekiyor.

Her α bölünemez formülünde, bir x değişkeninin her geçişinin yerine bir t terimi konulursa

$$(\alpha^x_t)$$

formül elde edilir. Ayrıca y x'ten farklı bir değişken olmak üzere

$$
\begin{gathered}
((\varphi^x_t) \wedge (\psi^x_t)) \text{ formülüdür } ((\varphi \wedge \psi)^x_t),\\
\neg(\varphi^x_t) \text{ formülüdür } (\neg\varphi^x_t),\\
\exists x\ \varphi \text{ formülüdür } (\exists x\ \varphi^x_t),\\
\exists y\ (\varphi^x_t) \text{ formülüdür } (\exists y\ \varphi^x_t).
\end{gathered}
$$

$\mathscr{J}$, $\dot{\mathscr{I}}$ imzasını kapsayan bir imza olsun, ve $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{Yap}(\mathscr{J})$ olsun. Eğer $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$'nin evrenleri aynı (yani $A = B$) ise, ve $\dot{\mathscr{I}}$'nin her S elemanı

$$S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}}$$

ise, o zaman $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$'nın $\mathscr{J}$'ye bir **açılımıdır.**

Eğer $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$ ve $X \subseteq A$ ise, o zaman X'in her a elemanı, yeni bir değişmez olarak anlaşılabilir. Bu değişmezler $\dot{\mathscr{I}}$'ye eklenirse

$$\dot{\mathscr{I}}(X)$$

imzası elde edilsin. O zaman $\mathfrak{A}$'nın $\dot{\mathscr{I}}(X)$'e $\mathfrak{A}_X$ açılımı vardır, ve burada, X'in her a elemanının yorumu kendisidir:

$$a^{\mathfrak{A}_X} = a.$$

Eğer bir σ cümlesi $\mathfrak{A}$'da **doğru** ise

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma$$

ifadesini yazarız. Tanımı şimdi verebiliriz.

1) $t^{\mathfrak{A}} = u^{\mathfrak{A}}$ ise $\mathfrak{A} \vDash t = u$.
2) $({t_0}^{\mathfrak{A}}, \dots, {t_{n-1}}^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}}$ ise $\mathfrak{A} \vDash Rt_0 \cdots t_{n-1}$.
3) $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ ve $\mathfrak{A} \vDash \tau$ ise $\mathfrak{A} \vDash (\sigma \wedge \tau)$.

4) $\mathfrak{A} \models \sigma$ değilse $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$.

5) A'nın bir a elemanı için $\mathfrak{A}_{\{a\}} \models \varphi^x_a$ ise $\mathfrak{A} \models \exists x\ \varphi$.

Eğer σ $\mathfrak{A}$'da doğru değilse **yanlıştır.**

Bazı kısaltmalardan faydalanabiliriz:

$$\begin{gathered}
t \neq u \text{ demek } \neg\, t = u, \\
(\varphi \vee \psi) \text{ demek } \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \\
(\varphi \to \psi) \text{ demek } (\neg\varphi \vee \psi), \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ demek } ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)), \\
\forall x\ \varphi \text{ demek } \neg\exists x\ \neg\varphi.
\end{gathered}$$

Bazı ayraçlar atlanabilir. Örneğin

$$\begin{gathered}
(\varphi \wedge \psi \wedge \theta) \text{ demek } (\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)), \\
(\varphi \to \psi \to \theta) \text{ demek } (\varphi \to (\psi \to \theta)), \\
(\varphi \wedge \psi \to \theta) \text{ demek } ((\varphi \wedge \psi) \to \theta).
\end{gathered}$$

Örnek 3.

1. $\forall x\ \exists y\ (x \neq 0 \to xy = 1)$ cümlesi her cisimde doğrudur ama $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \times, 1)$ halkasında yanlıştır.

2. $\forall x\ \exists y\ (y^2 = x \vee y^2 = -x)$ cümlesi $(\mathbb{R}, +, 0, -, \times, 1)$ cisminde doğrudur ama $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \times, 1)$ cisminde yanlıştır.

3. $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x < y \to x < z \wedge z < y)$ cümlesi $(\mathbb{Q}, <)$ sırasında doğrudur ama $(\mathbb{Z}, <)$ sırasında yanlıştır.

4. $\forall x\ \exists y\ \forall z\ xyz = z$ cümlesi $(\mathbb{Q}, \times)$ yapısında doğrudur ama $(\mathbb{Z}, \times)$ yapısında yanlıştır.

4. Tanımlanabilirlik

4.1. İşlemler

$\dot{\mathscr{I}}$ imzasından gelen, değişkenleri $\{x_i \colon i < n\}$ kümesinden gelen terimler

$$\mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$$

kümesini oluştursun. Böyle terimlere n-konumlu denebilir, fakat bu durumda her n-konumlu terim $(n+1)$-konumlu dadır:

$$\mathrm{Tm}^0(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Tm}^1(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Tm}^2(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \cdots$$

Eğer $t \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$, ve $\vec{a} \in A^n$ ise, $i < n$ olmak üzere her x_i değişkeninin t'deki her geçişinin yerine a_i konulduğu terim

$$t(\vec{a})$$

olarak yazılsın. Özyinelemeli bir tanım verilebilir:

1. $i < n$ ise $x_i(\vec{a})$, a_i olur.
2. d değişmezse $d(\vec{a})$, d olur.
3. m'nin her k elemanı $t_k(\vec{a})$, u_k ise ve F, m-konumlu yüklem ise $Ft_0 \cdots t_{m-1}(\vec{a})$, $Fu_0 \cdots u_{m-1}$ olur.

Şimdi

$$t^{\mathfrak{A}},\ A \text{ kümesinin } n\text{-konumlu } \vec{a} \mapsto t(\vec{a})^{\mathfrak{A}} \text{ işlemi}$$

olsun. Kısaca

$$t^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = t(\vec{a})^{\mathfrak{A}}. \tag{1}$$

Özel olarak

$$\begin{aligned} {x_i}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) &= a_i, \\ d^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) &= d^{\mathfrak{A}}, \\ (Ft_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) &= F^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})). \end{aligned} \tag{2}$$

Genelde $X \subseteq A$ ise $\{t^{\mathfrak{A}} \colon t \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}}(X))\}$ kümesinin elemanları, $\mathfrak{A}$'nın X üzerinde n-konumlu **tanımlanabilir** işlemleridir.

Örnek 4. 1) bir $(G, \times, \mathrm{e}, ^{-1})$ grubunda $a \in G$ olmak üzere

$$x \mapsto a^{-1}xa$$

işlemi tanımlanabilir;

2) bir $(K, +, 0, -, \times, 1)$ cisminde $a_i \in K$ olmak üzere

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

polinom işlemi tanımlanabilir.

4.2. Bağıntılar

$\dot{\mathscr{I}}$ imzasından gelen, serbest değişkenleri $\{x_i \colon i < n\}$ kümesinden gelen formüller

$$\mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}})$$

kümesini oluştursun. Böyle formüllere n-konumlu denebilir, fakat bu durumda her n-konumlu formül $(n+1)$-konumlu dadır:

$$\mathrm{Fm}^0(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Fm}^1(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Fm}^2(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \cdots$$

Eğer $\varphi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$, ve $\vec{a} \in A^n$ ise

$$((\cdots(\varphi^{x_0}_{a_0})\cdots)^{x_{n-1}}_{a_{n-1}})$$

ifadesinin yerine

$$\varphi(\vec{a})$$

yazalım. O zaman

$$\varphi^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} \in A^n \colon \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})\}$$

olsun. Bu şekilde

$$\vec{a} \in \varphi^{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}). \tag{3}$$

Özel olarak $t \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise

$$(t = x_n)^{\mathfrak{A}} = \{(\vec{a}, b) \in A^{n+1} \colon t^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = b^{\mathfrak{A}}\}.$$

Eğer $t_i \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise

$$(t_0 = t_1)^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} \in A^n \colon {t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = {t_1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})\}, \tag{4}$$

ve R m-konumlu yüklem ise

$$\begin{aligned}&(Rt_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}}\\ &\qquad = \{\vec{a} \in A^n \colon ({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathfrak{A}}\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Ayrıca

$$(x_0 = x_0 \land \cdots \land x_{n-1} = x_{n-1})^{\mathfrak{A}} = A^n, \tag{6}$$

$$\neg\varphi^{\mathfrak{A}} = A^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{A}}, \tag{7}$$

ve $\psi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise

$$(\varphi \land \psi)^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}} \cap \psi^{\mathfrak{A}},$$
$$(\varphi \lor \psi)^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}} \cup \psi^{\mathfrak{A}}.$$

Şimdi π, A^{n+1} kuvvetinden A^n kuvvetine giden

$$(a_0, \dots, a_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$$

göndermesi olsun. $X \subseteq A^{n+1}$ ise $\pi[X]$ (yani $\{\pi(\vec{a})\colon \vec{a} \in X\}$), X'in **izdüşümüdür.** Eğer $\theta \in \mathrm{Fm}^{n+1}(\dot{\mathscr{I}})$ ise $\exists x_n\ \theta^{\mathfrak{A}}$, $\theta^{\mathfrak{A}}$'nın izdüşümüdür:

$$\exists x_n\ \theta^{\mathfrak{A}} = \pi\left[\theta^{\mathfrak{A}}\right].$$

Şimdi $X \subseteq A$ olmak üzere

$$\mathrm{Tan}_X^n(\mathfrak{A}) = \{\varphi^{\mathfrak{A}}\colon \varphi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}}(X))\}$$

olsun. Bu kümenin elemanları, $\mathfrak{A}$'nın X üzerinde n-konumlu **tanımlanabilir** bağıntılarıdır. Kısaca X üzerinde tanımlanabilir bir bağıntı, X-tanımlanabilirdir.

$\mathrm{Tan}_X^n(\mathfrak{A})$, $\mathscr{P}(A^n)$ Boole cebirinin altcebiridir, yani $\cup$, $\cap$, ve $'$ işlemleri altında kapalıdır, ve boş kümeyi ve A^n kuvvetinin tümümü içrir.

Normalde (x_0, x_1, x_2) değişken listesinin yerine (x, y, z) kullanılır.

Örnek 5.

1. $(G, \times, \mathrm{e}, {}^{-1})$ bir grup ise $\{(a, a^{-1})\colon a \in G\}$ bağıntısı, $(G, \times, \mathrm{e})$ yapısında

$$xy = \mathrm{e}$$

formülü tarafından tanımlanır. Özel olarak bu formül ve

$$y = x^{-1}$$

formülü, aynı bağıntısını tanımlar. Ayrıca $(G, \times)$ yapısında $\{\mathrm{e}\}$ kümesi,

$$\forall y\ (xy = y \wedge yx = y)$$

tarafından tanımlanır. Aslında

$$\forall y\ xy = y, \qquad\qquad \exists y\ xy = y$$

formüllerinden her biri kullanılabilir. Sonuç olarak $(G, \times)$ yapısında $\{(a, a^{-1}) \colon a \in G\}$ bağıntısı,

$$\exists z\ xyz = xz$$

formülü tarafından tanımlanır. Bu nedenle $(G, \times)$ yapısına da grup denebilir.

2. Benzer şekilde $(K, +, 0, -, \times, 1)$ bir cisim ise $(K, +, \times)$ yapısında $\{(a, -a) \colon a \in K\}$, $\{0\}$, ve $\{1\}$ bağıntıları $\varnothing$-tanımlanabilir.

3. $(\mathbb{R}, +, \times)$ cisminde $\{(x, y) \colon x \leqslant y\}$ sıralaması,

$$\exists z\ x + zz = y$$

tarafından tanımlanır.

4. Bir grubun **merkezi** $\forall y\ xy = yx$ tarafından tanımlanır.

Şimdi bölünemez formül tarafından tanımlanan bağıntılara **temel** densin. O zaman $\bigcup_{n \in \omega} \mathrm{Tan}^n_A(\mathfrak{A})$ birleşiminin her elemanı, kesişimler, tümleyenler, ve izdüşümler alınarak temel tanımlanabilir bağıntılardan elde edilibilir.

Bir formülde $\exists x$ ifadesi (ve $\neg\exists x\ \neg$ ifadesinin $\forall x$ kısaltması) bir **niceleyicidir.** Şimdi

$$\mathrm{Fm}^n_0(\dot{\mathscr{I}}) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}}) \colon \varphi \text{ niceleyicisiz}\}$$

olsun. Bu kümeye özyinelemeli bir tanım verilebilir, yani Teorem 1 gibi bir teorem vardır:

Teorem 3. *Bir A kümesi için,*

1.   *a) $\{t, u\} \subseteq \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise $t = u \in A$ olsun;*

b) R, $\mathscr{I}$'nin m-konumlu bir yüklem ise, ve $\{t_0, \dots, t_{m-1}\} \subseteq \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise, o zaman $Rt_0 \cdots t_{m-1} \in A$ olsun;

2. $\varphi \in A$ ise $\neg\varphi \in A$ olsun;

3. $\{\varphi, \psi\} \subseteq A$ *ise* $(\varphi \wedge \psi) \in A$ *olsun.*
O zaman $\mathrm{Fm}_0^n \subseteq A$.

O zaman
$$\{\varphi^{\mathfrak{A}} \colon \varphi \in \mathrm{Fm}_0^n(\dot{\mathscr{I}}(X))\}$$
kümesi, $\mathscr{P}(A^n)$ Boole cebirinin, tüm temel tanımlanabilir bağıntıları içeren altcebirlerinin en küçüğüdür.

$\mathrm{Tan}_A^1(\mathfrak{A})$ kümesinin elemanları, $\mathfrak{A}$'nın tanımlanabilir kümeleridir. A'nın her sonlu $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ altkümesi
$$x = a_0 \vee \cdots \vee x = a_{n-1}$$
formülü tarafından tanımlanır. O zaman tümleyeni sonlu olan kümeler de tanımlanabilir.

5. Göndermeler

Bu bölümde bir $\dot{\mathscr{I}}$ imzasında $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$, imzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan yapı olacaklar, ve $h\colon A \to B$. Eğer $\vec{a} \in A^n$ ise
$$h(\vec{a}) = (h(a_0), \dots, h(a_{n-1})) \tag{8}$$
anlaşılabilir. O zaman $X \subseteq A^n$ ise
$$h[X] = \{h(\vec{a}) \colon \vec{a} \in X\}.$$

5.1. Homomorfizimler

Eğer $\dot{\mathscr{I}}$'nin her

1) d değişmezi için
$$h(d^{\mathfrak{A}}) = d^{\mathfrak{B}},$$

2) F işlem simgesi için

$$h \circ F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}} \circ h, \tag{9}$$

3) R yüklemi için

$$h[R^{\mathfrak{A}}] \subseteq R^{\mathfrak{B}} \tag{10}$$

ise, o zaman h, $\mathfrak{A}$'dan $\mathfrak{B}$'ye giden bir **homomorfizim** veya **benzer yapı dönüşümüdür.** Bu durumda

$$h \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

ifadesini yazalım.

Örnek 6.

1. $x \mapsto [x] \colon (\mathbb{Z}, +, \times) \to (\mathbb{Z}_n, +, \times)$.
2. $x \mapsto x \colon (\mathbb{N}, \mid\,) \to (\mathbb{N}, \leqslant)$.
3. $(x, y) \mapsto mx + ny \colon (\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n, +) \to (\mathbb{Z}_{mn}, +)$.

Teorem 4. *$h \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ve t, $\dot{\mathscr{I}}$'nin bir terimi ise*

$$h \circ t^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{B}} \circ h. \tag{11}$$

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. $h({x_i}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = h(a_i) = {x_i}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))$.
2. d değişmeziyse $h(d^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = h(d^{\mathfrak{A}}) = d^{\mathfrak{B}} = d^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))$.
3. Bir m için F, m-konumlu bir yüklem ise, ve t'nin t_i olduğu durumda (11) iddiası doğru ise

$$\begin{aligned}
&h((Ft_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \\
&\qquad = h(F^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) && [(2)] \\
&\qquad = F^{\mathfrak{B}}(h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) && [(9)] \\
&\qquad = F^{\mathfrak{B}}(h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})), \dots, h({t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) && [(8)] \\
&\qquad = F^{\mathfrak{B}}({t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))) && [\text{hipotez}] \\
&\qquad = (Ft_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})). && [(2)]
\end{aligned}$$

Tümevarımla her t için iddia doğrudur. $\square$

Teorem 5. *$h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ve φ, $\dot{\mathscr{I}}$'in bölünemez bir formülü ise*

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}] \subseteq \varphi^{\mathfrak{B}}.$$

Kanıt. φ'nin iki durumu vardır.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \in (t_0 = t_1)^{\mathfrak{A}} &\implies t_0(\vec{a})^{\mathfrak{A}} = t_1(\vec{a})^{\mathfrak{A}}, && [(4)]\\
&\implies h(t_0(\vec{a})^{\mathfrak{A}}) = h(t_1(\vec{a})^{\mathfrak{A}}) && \\
&\implies h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = h({t_1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) && [(1)]\\
&\implies {t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})) = {t_1}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})) && [\text{Teorem 4}]\\
&\implies t_0(h(\vec{a}))^{\mathfrak{B}} = t_1(h(\vec{a}))^{\mathfrak{B}} && [(1)]\\
&\implies h(\vec{a}) \in (t_0 = t_1)^{\mathfrak{B}}, && [(4)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \in (Rt_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}}\\
&\qquad\implies ({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathfrak{A}} && [(5)]\\
&\qquad\implies h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathfrak{B}} && [(10)]\\
&\qquad\implies (h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})), \dots, h({t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) \in R^{\mathfrak{B}} && [(8)]\\
&\qquad\implies ({t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})), \dots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))) \in R^{\mathfrak{B}} && [\text{Teorem 4}]\\
&\qquad\implies h(\vec{a}) \in (Rt_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{B}}. && [(5)]
\end{aligned}$$

Her durumda $\vec{a} \in \varphi^{\mathfrak{A}} \implies h(\vec{a}) \in \varphi^{\mathfrak{B}}$. $\square$

5.2. Gömmeler

$h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ olsun. Eğer

1) h birebir ve
2) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her R yüklemi için $h[R^{\mathfrak{A}}] = R^{\mathfrak{B}} \cap h[A]$

ise, o zaman h, $\mathfrak{A}$'nin $\mathfrak{B}$'ye bir **gömmesidir,** ve bu durumda

$$h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$$

ifadesini yazabiliriz.

Örnek 7.

1. $\mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$, ama $i \in n$ olmak üzere $h([i]) = i$ ise h, $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubunun $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna bir gömmesi değildir çünkü $[1] + [n-1] = [0]$ ama $1 + n - 1 = n$, ve $h([0]) \neq n$.
2. $[x] \mapsto [mx]\colon (\mathbb{Z}_n, +) \xrightarrow{\subseteq} (\mathbb{Z}_{mn}, +)$.
3. $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$, $[x] \mapsto [mx]$ tarafından $(\mathbb{Z}_{mn}, +, \times)$ halkasına gömülmez.
4. Tanıma göre $(a, b)\ E\ (x, y) \iff ay = bx$ ise

$$\mathbb{Q}^+ = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/E$$

olsun. Bu kümenin her $[(a, b)]$ elemanı, a/b veya

$$\frac{a}{b}$$

olarak yazılabilir. O zaman okuldaki gibe toplama ve çarpma $\mathbb{Q}^+$ kümesinde tanımlanabilir, ve

$$x \mapsto \frac{x}{1}\colon (\mathbb{N}, +, \times) \xrightarrow{\subseteq} (\mathbb{Q}^+, +, \times).$$

5. $(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +) \xrightarrow{\subseteq} (\mathrm{Mat}^{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$.
6. $x + \mathrm{i}y \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : (\mathbb{C}, +, \times) \xrightarrow{\subseteq} (\mathrm{Mat}^{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \times)$.

Eğer $h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$ ve h, $x \mapsto x$ özdeşlik göndermesiyse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$'nin **altyapısıdır,** ve bu durumda

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$$

ifadesini yazarız.

Teorem 6. *$h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$ ve φ, $\dot{\mathscr{I}}$'in niceleyicisiz bir formül ise*

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}] = \varphi^{\mathfrak{B}} \cap h[A^n]. \tag{12}$$

Kanıt. Teorem 3'e göre tümevarım kullanacağız.

1. Şimdiki durumda Teorem 5'in adımları tersilenebilir, dolayısıyla φ bölünemez ise (12) iddiası doğrudur.
2. İddia φ'nin ψ olduğu durumda doğru ise

$$\begin{aligned}
\vec{a} \in \neg\varphi^{\mathfrak{A}} &\iff \vec{a} \in A^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{A}} && [(7)]\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[A^n] \smallsetminus h[\varphi^{\mathfrak{A}}] && [h \text{ birebir}]\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[A^n] \smallsetminus (\varphi^{\mathfrak{B}} \cap h[A^n]) && [\text{hipotez}]\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[A^n] \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{B}}\\
&\iff h(\vec{a}) \in B^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{B}}\\
&\iff h(\vec{a}) \in \neg\varphi^{\mathfrak{B}}. && [(7)]
\end{aligned}$$

3. İddia φ'nin ψ veya θ olduğu durumda doğru ise

$$\begin{aligned}
\vec{a} \in (\psi \wedge \theta)^{\mathfrak{A}} &\iff \vec{a} \in \psi^{\mathfrak{A}} \cap \theta^{\mathfrak{A}} && []\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[\psi^{\mathfrak{A}}] \cap h[\theta^{\mathfrak{A}}] && []\\
&\iff h(\vec{a}) \in \psi^{\mathfrak{B}} \cap \theta^{\mathfrak{B}} && []\\
&\iff h(\vec{a}) \in (\psi \wedge \theta)^{\mathfrak{B}}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak iddia her niceleyicisiz φ için doğrudur. □

5.3. İzomorfizimler

Eğer $h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$ ve $h[A] = B$ ise, o zaman h^{-1} de bir gömmedir, ve h bir **eşyapı dönüşümü** veya **izomorfizimdir.** Bu durumda

$$h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$$

ifadesini yazalım.

Örnek 8.

1. $\operatorname{ebob}(m,n)=1$ ise

$$(x,y)\mapsto mx+ny\colon(\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n,+)\xrightarrow{\cong}(\mathbb{Z}_{mn},+).$$

2. **Çin Kalan Teoremi.** $\operatorname{ebob}(m,n)=1$, $an\equiv 1\pmod{m}$ ve $bm\equiv 1\pmod{n}$ ise

$$(x,y)\mapsto anx+bmy\colon(\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n,+,\times)\xrightarrow{\cong}(\mathbb{Z}_{mn},+,\times).$$

Teorem 7. *$h\colon\mathfrak{A}\xrightarrow{\cong}\mathfrak{B}$ ise $\dot{\mathscr{I}}$'in her φ formülü için*

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}]=\varphi^{\mathfrak{B}}.$$

Kanıt. $\psi\in\mathrm{Fm}^{n+1}(\dot{\mathscr{I}})$ ve iddia φ'nin ψ olduğu durumda doğru olsun, ve $\vec{a}\in A^n$ olsun. O zaman h eşleme olduğundan A'nın bir b elemanı için $(\vec{a},b)\in\psi^{\mathfrak{A}}$ ancak ve ancak B'nin bir c elemanı için $(h(\vec{a}),c)\in\psi^{\mathfrak{A}}$. Kısaca

$$h[\exists x_n\ \varphi^{\mathfrak{A}}]=\exists x_n\ \varphi^{\mathfrak{B}}.$$

Kanıtın kalanı, Teorem 6'nın kanıtı gibidir. □

Kaynaklar

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson. *Models and ultraproducts: An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969. Reissued by Dover, 2006.

[2] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990. First edition 1973.

[3] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü.* Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[4] Teo Grünberg and Adnan Onart. *Mantık Terimleri Sözlüğü.* Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[5] Roe-Merrill S. Heffner. *Brief German Grammar.* D. C. Heath and Company, Boston, 1931.

[6] Wilfrid Hodges. *Model theory*, volume 42 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[7] Annalisa Marcja and Carlo Toffalori. *A guide to classical and modern model theory*, volume 19 of *Trends in Logic—Studia Logica Library.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[8] David Marker. *Model theory: an introduction*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[9] Ali Nesin. *Analiz IV.* Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2011.

[10] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles.* Bruno Poizat, Lyon, 1985. Une introduction à la logique mathématique contemporaine. [An introduction to contemporary mathematical logic].

[11] Bruno Poizat. *A course in model theory.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction to contemporary mathematical logic, Translated from the French by Moses Klein and revised by the author.

[12] Abraham Robinson. *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963.

[13] Abraham Robinson. *Complete theories.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1977. With a preface by H. J. Keisler, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, first published 1956.

[14] Abraham Robinson. *Non-standard analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. Reprint of the second (1974) edition. With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg. First edition 1965.

[15] Philipp Rothmaler. *Introduction to Model Theory*, volume 15 of *Algebra, Logic and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000. Originally published in German in 1995.

[16] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical logic.* Association for Symbolic Logic, Urbana, IL, 2001. reprint of the 1973 second printing.

[17] Herbert Weir Smyth. *Greek Grammar.* Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1980. Revised by Gordon M. Messing, 1956. Eleventh Printing. Original edition, 1920.

[18] Michael Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

[19] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A Course in Model Theory*, volume 40 of *Lecture Notes in Logic.* Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA, 2012.

A. Yunan Harfleri

büyük	minüskül	çeviri	ad
Α	α	a	alpha
Β	β	b	bêta
Γ	γ	g	gamma
Δ	δ	d	delta
Ε	ε	e	epsilon (basit e)
Ζ	ζ	z	zêta
Η	η	ê	êta
Θ	ϑ	th	thêta
Ι	ι	i	iôta
Κ	ϰ	k	kappa
Λ	λ	l	lambda
Μ	μ	m	mü
Ν	ν	n	nü
Ξ	ξ	x, ks	xi
Ο	ο	o	omikron (küçük o)
Π	π	p	pi
Ρ	ρ	r	rhô
Σ	σ, ς	s	sigma
Τ	τ	t	taü
ϒ	υ	y, ü	üpsilon (basit ü)
Φ	φ	ph, f	phi
Χ	χ	kh, ch	khi
Ψ	ψ	ps	psi
Ω	ω	ô	ômega (büyük ô)

Epsilon ve üpsilon "basittir" çünkü Orta Çağ'da αι ve οι birleşimlerinin telaffuzları aynıymış [17].

B. Alman Harfleri

$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}$ $\mathfrak{B}\,\mathfrak{b}$ $\mathfrak{C}\,\mathfrak{c}$ $\mathfrak{D}\,\mathfrak{d}$ $\mathfrak{E}\,\mathfrak{e}$ $\mathfrak{F}\,\mathfrak{f}$ $\mathfrak{G}\,\mathfrak{g}$

$\mathfrak{H}\,\mathfrak{h}$ $\mathfrak{I}\,\mathfrak{i}$ $\mathfrak{J}\,\mathfrak{j}$ $\mathfrak{K}\,\mathfrak{k}$ $\mathfrak{L}\,\mathfrak{l}$ $\mathfrak{M}\,\mathfrak{m}$ $\mathfrak{N}\,\mathfrak{n}$

$\mathfrak{O}\,\mathfrak{o}$ $\mathfrak{P}\,\mathfrak{p}$ $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{q}$ $\mathfrak{R}\,\mathfrak{r}$ $\mathfrak{S}\,\mathfrak{s}$ $\mathfrak{T}\,\mathfrak{t}$ $\mathfrak{U}\,\mathfrak{u}$

$\mathfrak{V}\,\mathfrak{v}$ $\mathfrak{W}\,\mathfrak{w}$ $\mathfrak{X}\,\mathfrak{x}$ $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{y}$ $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{z}$

Aşağıdaki yazılı biçimleri Heffner'in [5] kitabından alınır: