# Sonsuzküçük Analiz

***Infinitesimal Analysis***

David Pierce

1 Temmuz 2018

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/
david.pierce@msgsu.edu.tr

Tam sıralanmış bir cismin var olduğunu varsayıyoruz, ve o cismi

$$\mathbb{R}$$

ile yazıyoruz; $\mathbb{R}$'nin elemanları, **gerçel sayılardır. Sayma sayıları** kümesini

$$\mathbb{N}$$

ile yazalım. *Seçim Aksiyomu* ile $\mathbb{N}$'nin her altkümesi ya **küçük** ya da **büyük** olarak (ama ikisi değil) belirtilebilir, öyle ki

i) her sonlu küme küçüktür;

ii) her küçük kümenin tümleyeni büyüktür;

iii) iki küçük kümenin birleşimi de küçüktür.

Sonuç olarak

iii) iki büyük kümenin kesişimi de büyüktür;

iv) büyük bir küme kapsayan her küme de büyüktür.

Kendi ve tümleyeni sonlu olmadığından çift sayma sayıları kümesi ya büyük ya da küçük olabilir; işimiz için fark etmez.

Bir **dizi,** $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon olsun. İstersek, bu dizilerin oluşturduğu küme

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

olarak yazabiliriz. Aynı dizi ya $a$, ya da $(a_k \colon k \in \mathbb{N})$, ya da $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ olarak yazılabilir. Girdilerine göre iki dizinin toplamı ve çarpımı tanımlanabilir:

$$a + b = (a_k + b_k \colon k \in \mathbb{N}), \qquad ab = (a_k b_k \colon k \in \mathbb{N}).$$

Halka kavramını bilenler için $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bir halkadır. Ayrıca

$$a < b \iff \{k \in \mathbb{N} \colon a_k < b_k\} = \mathbb{N}$$

kuralına göre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ parçalı sıralanmıştır. Şimdi tanıma göre

$$a \sim b \iff \{k \in \mathbb{N} \colon a_k = b_k\} \text{ büyüktür}$$

olsun.

**Teorem 1.** $\sim$ *bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

Verilen $\sim$ bağıntısına göre bir $a$ dizisinin denklik sınıfı $[a]$ olarak yazılsın, ve bütün dizilerin denklik sınıfları, ${}^*\mathbb{R}$ kümesini oluştursun. Böylece

$${}^*\mathbb{R} = \{[x] \colon x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}.$$

**Teorem 2.** *$\sim$ bağıntısı $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının işlemlerine saygı gösterir, yani*

$$a \sim c \ \& \ b \sim d \implies a + b \sim c + d \ \& \ ab \sim cd.$$

*Bu şekilde ${}^*\mathbb{R}$, iyitanımlanmış bir cisim olur. Ayrıca*

$$[a] < [b] \iff \{k \in \mathbb{N} \colon a_k < b_k\} \text{ büyüktür}$$

*kuralına göre ${}^*\mathbb{R}$, iyitanımlanmış* sıralanmış *bir cisim olur. Bu sıralanmış cisme*

$$x \mapsto [x, x, x, \dots]$$

köşegen *gömmesi ile $\mathbb{R}$ gömülür.*

${}^*\mathbb{R}$ cisminin elemanlarına **gerçelüstü** (*hyperreal*) denebilir. Son teoremi kullanarak $\mathbb{R}$'yi ${}^*\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olarak düşüneceğiz; böylece her gerçel sayı, gerçelüstüdür. Eğer gerçelüstü bir sayının mutlak değeri

- *bir* pozitif gerçel sayıdan küçük ise, gerçelüstü sayıya **sonlu** densin;
- *her* pozitif gerçel sayıdan küçük ise, gerçelüstü sayıya **sonsuzküçük** (*infinitesimal*) densin.

Eğer $[a] - [b]$ sonsuzküçük ise

$$[a] \approx [b]$$

yazılsın; bu durumda $[b]$, $[a]$'ya **sonsuzyakındır** (*infinitely close*).

**Teorem 3.** *${}^*\mathbb{R}$ cisminde $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca $[a] \approx [c]$, $[b] \approx [d]$, ve $[e]$ sonlu ise*

$$[a] + [b] \approx [c] + [d], \qquad [a][c] \approx [c][e].$$

*Sonlu gerçelüstü bir sayıya sonsuzyakın sayılar da sonludur.*

**Teorem 4.** *Eğer* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ise, o zaman*

$$[x] \mapsto [f(x_k)\colon k \in \mathbb{N}],$$

*${}^*\mathbb{R}$'den kendisine giden iyitanımlanmış bir fonksiyondur.*

Teoremde bulunan fonksiyon ${}^*f$ olarak yazılabilir. Şimdi $a$ ve $L$, gerçel sayı olsun. Eğer her $[x]$ gerçelüstü sayısı için

$$a \approx [x] \;\;\&\;\; a \neq [x] \implies {}^*f[x] \approx L$$

gerektirmesi sağlanırsa, o zaman tanımımıza göre $L$, $f$'nin $a$'daki **limitidir.** Bu limiti

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{veya} \qquad \lim_a f$$

ile yazabiliriz.

**Teorem 5.** $\lim_a f = L$ *ve* $\lim_a g = M$ *ise*

$$\lim_a (f+g) = L + M \;\;\&\;\; \lim_a (fg) = LM.$$

*Kanıt.* Eğer $[x] \approx a$ ve $[x] \neq a$ ise, o zaman varsayıma göre

$$ {}^*f[x] \approx L, \qquad\qquad {}^*g[x] \approx M,$$

dolayısıyla ${}^*f[x]$ sonludur ve

$$ {}^*f[x] + {}^*g[x] \approx L + M, \qquad {}^*f[x]\,{}^*g[x] \approx {}^*f[x]M \approx LM. \qquad \square$$

**Teorem 6.** *Her sonlu gerçelüstü sayı, bir ve tek bir gerçel sayıya sonsuzyakındır.*

*Kanıt.* Eğer $[a]$ sonlu ise, o zaman $\{x \in \mathbb{R}\colon x < [a]\}$ kümesi boş değildir ve üst sınırı vardır. O halde verilen kümenin supremumu, $[a]$'ya sonsuzyakındır. $\square$

Kanıtta bulunan gerçel sayı, $[a]$'nın **standart parçasıdır** (*standard part*).

Eğer her $a$ gerçel sayısı için $f(a) = \lim_a f$ ise, o zaman $f$ **süreklidir.**

**Teorem 7** (Aradeğer)**.** *$f$ sürekli, $a < b$, ve $f(a) < 0 < f(b)$ olsun. O zaman bir $c$ için $a < c < b$ ve $f(c) = 0$.*

*Kanıt.* Her $k$ sayma sayısı için, bir $d_k$ için,

$$a \leqslant d_k < d_k + k^{-1} \leqslant b, \qquad f(d_k) \leqslant 0 \leqslant f(d_k + k^{-1}).$$

Şimdi

$$d = (d_k \colon k \in \mathbb{N}), \qquad \delta = (k^{-1} \colon k \in \mathbb{N})$$

olsun. O zaman $[\delta]$ sonsuzküçüktür, dolayısıyla

$${}^*f[d] \approx {}^*f[d + \delta].$$

Ayrıca

$${}^*f[d] \leqslant 0 \leqslant {}^*f[d + \delta].$$

Şimdi $c$, $[d]$'nin standart parçası olsun. O zaman

$$f(c) \approx {}^*f[d], \qquad {}^*f[d] \approx 0, \qquad f(c) = 0. \qquad \square$$

Cebirsel açıdan $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon x \sim 0\}$ kümesi, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının asıl olmayan (*non-principal*) asal bir idealidir, ve

$${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon x \sim 0\}.$$

Eğer tam tersine $P$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının asıl olmayan asal bir ideali ise, o zaman $\mathbb{N}$'nin küçük altkümeleri, $P$'nin $a$ elemanları için

$$\{k \in \mathbb{N} \colon a_k \neq 0\}$$

olarak tanımlanabilir.

${}^*\mathbb{R}$ cisminin sonlu elemanları, bir $\mathfrak{O}$ değerlendirme halkası (*valuation ring*) oluşturur, ve bunun $\mathfrak{M}$ maksimal idealinin elemanları, ${}^*\mathbb{R}$'nin sonsuzküçük elemanlarıdır. Bu durumda tanım kümesi $\mathbb{R}$ olan

$$x \mapsto [x, x, x, \dots] + \mathfrak{M}$$

göndermesi, $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ üstüne bir $\varphi$ izomorfizmasıdır, ve $[a]$ sonlu ise $\varphi^{-1}([a] + \mathfrak{M})$, $[a]$'nın standart parçasıdır.

**Teorem 8.** *$\mathbb{R}$'de $\lim_a f = L$ ancak ve ancak her pozitif $\varepsilon$ için, bir pozitif $\delta$ için, her $x$ için*

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

*Kanıt.* İlk olarak her pozitif gerçel $\varepsilon$ için, bir pozitif gerçel $\delta$ için, her gerçel $x$ için, $0 < |x - a| < \delta$ ise $|f(x) - L| < \varepsilon$ olsun. Bir $x$ *dizisi* için $[x] \approx a$ ama $[x] \neq a$ olsun. O halde ${}^*f[x] \approx L$ göstereceğiz. Şimdi $\varepsilon$, pozitif gerçel bir sayı olsun; $\{k \in \mathbb{N} \colon |f(x_k) - L| < \varepsilon\}$ kümesinin büyük olduğunu göstermek yeter. Varsayıma göre pozitif gerçel bir $\delta$ için o küme $\{k \in \mathbb{N} \colon 0 < |x_k - a| < \delta\}$ kümesini kapsar; ayrıca bu küme büyüktür.

Şimdi $\varepsilon$, pozitif gerçel bir sayı olsun. Mümkünse her pozitif gerçel $\delta$ için, bir gerçel $x$ için,

$$0 < |x - a| < \delta \;\; \& \;\; |f(x) - L| \geqslant \varepsilon$$

olsun. O zaman bir $x$ *dizisi* için her $k$ sayma sayısı için

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k} \;\; \& \;\; |f(x_k) - L| \geqslant \varepsilon.$$

Bu durumda $[x] \approx a$, ama $[x] \neq a$, ve ${}^*f[x] \not\approx L$. $\square$