Sonsuzküçük Analiz

Infinitesimal Analysis

David Pierce

30 Aralık 2018

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/`
`david.pierce@msgsu.edu.tr`

Önsöz

Bu notlar, kalkülüs öğrencileri ve öğretmenleri için yazılmıştır. "Epsilon–delta" tanımını kullanmadan limitleri tanımlayacağız ve onların temel teoremlerini kanıtlayacağız.

Limitlerin "standart," "epsilon-delta" tanımı karmaşıktır. Vereceğimiz "standart olmayan," "sonsuzküçük" tanım daha basittir, ama arkasındaki cebir karmaşıktır. Kalkülüsün kendisi karmaşıktır, ve farklı öğrenciler ve öğretmenler, farklı yöntemleri tercih edebilirler.

Aşağıda bazı teoremlerin kanıtı, okuyana bırakılıyor. Teknik terimler, *italik* olabildiği halde tanımlanınca **siyahtır.**

Abraham Robinson [8] sonsuzküçük yöntemi sert bir şekilde meydana koydu. Keisler [5] tarafından ve Henle ile Kleinberg [3] tarafından yazılmış sonsuzküçük yöntemi kullanan ders kitapları vardır.

İçindekiler

Şekil Listesi

Gerçelüstü sayılar

1 Gerçel sayılar ve sayma sayıları

Tam sıralanmış bir *cismin* var olduğunu varsayıyoruz, ve o cismi

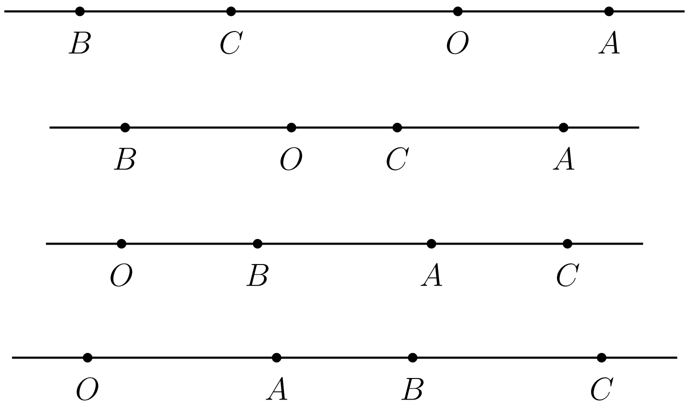
$$\mathbb{R}$$

ile yazıyoruz; $\mathbb{R}$'nin elemanları, **gerçel sayılardır.** Bu sayılar, sınırsız bir doğru oluşturur, ve bu yöntemle sayıların işlemlerine geometrik tanımlar verilebilir. Örneğin Şekiller 1 ve 2'de O, A, B, ve C noktaları, 0, a, b, ve c gerçel sayıları olarak düşünülsün, ve Şekil 2'de I noktası, 1 gerçel sayısı olarak düşünülsün. Şekil 1'de eğer

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$$

ise, o zaman

$$a + b = c.$$



Şekil 1: Gerçel sayıların toplanması

Toplamanın birleştirme ve değiştirme özellikleri, ve her gerçel sayının negatifinin var olduğu, apaçıktır. Şekil 2'de eğer

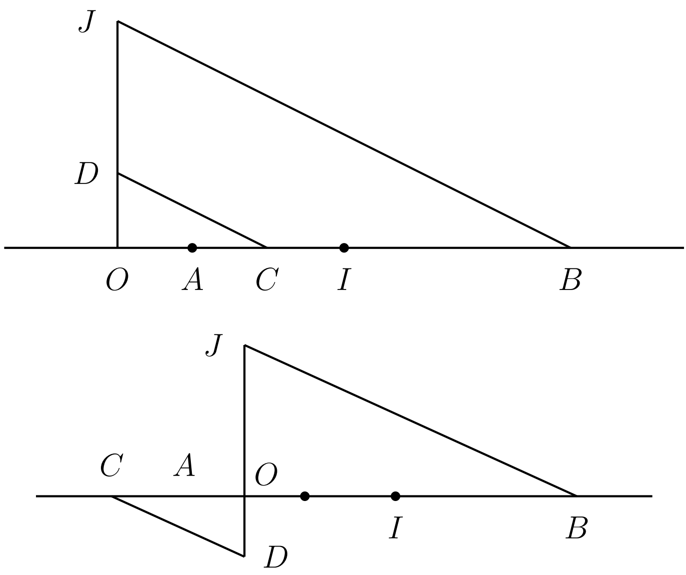
$$OD = OA, \qquad OJ = OI, \qquad DC \parallel JB$$

ise, o zaman

$$ab = c.$$

Gerçel sayıların çarpılmasının geometrik tanımı, Descartes [1] tarafından verildi. Çarpmanın birleştirme, değiştirme, ve toplama üzerinde dağılma özellikleri, ve sıfır olmayan her gerçel sayının tersinin var olduğu, apaçık değildir. Öklid'de bulunan orantı kuramını kullanmadan Hilbert [4], çarpmanın özelliklerini sert bir şekilde kurur. Bu iş için, "Thales and the Nine-point Conic" [7] başlıklı makalemdeki gibi Öklid'in birinci kitabı [6] yeter.

Gerçel sayıların **tamlığına** göre, eğer Şekil 3'teki gibi gerçel sayılar doğrusu iki parçaya kırılırsa, o zaman parçaların birinin uç noktası vardır. Tamlığı Teorem 11'de kullanacağız.



Şekil 2: Gerçel sayıların çarpılması

Şekil 3: Gerçel sayıların tamlığı

Sayma sayıları kümesini $\mathbb{N}$ ile yazalım. O zaman

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Bu kümesi, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olarak düşünülebilir. Bu varsayımı, Teorem 17'de kullanacağız.

2 Küçük ve büyük kümeler

$\mathbb{N}$'nin bazı altkümeleri **küçüktür.** Tanıma göre

i) her sonlu küme küçüktür;
ii) küçük bir küme tarafından kapsanan her küme de küçüktür;
iii) iki küçük kümenin birleşimi de küçüktür.

Ayrıca $\mathbb{N}$'nin her sonlu altkümesinin tümleyeni **küçüktür,** dolayısıyla

iv) sonlu tümleyeni olan her küme büyüktür;
v) büyük bir küme kapsayan her küme de büyüktür;
vi) iki büyük kümenin kesişimi de büyüktür.

$\mathbb{N}$'nin her altkümesinin ya küçük ya da büyük olduğunu ama ikisi olmadığını, Bölüm 10'da bahsedilen *Seçim Aksiyomunu* kullanarak varsayıyoruz.

3 Diziler ve denklikleri

Bir **dizi,** $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyondur. Dizilerin oluşturduğu küme

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

olarak yazabiliriz.

- Ya $(a_k \colon k \in \mathbb{N})$,
- ya da $(a_1, a_2, a_3, \dots)$,

- ya da kısaca $\boldsymbol{a}$

olarak aynı diziyi yazabiliriz. Girdilerine göre,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_k+b_k\colon k\in\mathbb{N}),\qquad \boldsymbol{ab}=(a_kb_k\colon k\in\mathbb{N})$$

kurallarını kullanarak iki dizinin toplamını ve çarpımını tanımlarız. Şimdi tanıma göre

$$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{b}\iff\{k\in\mathbb{N}\colon a_k=b_k\}\text{ büyüktür}$$

olsun.

Teorem 1. *$\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

Verilen $\sim$ bağıntısına göre $[\boldsymbol{a}]$ olarak bir $\boldsymbol{a}$ dizisinin denklik sınıfını yazalım. Böylece

$$[\boldsymbol{a}]=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\colon\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{x}\}.$$

Bütün dizilerin denklik sınıfları, ${}^*\mathbb{R}$ kümesini oluştursun. Böylece

$$^*\mathbb{R}=\{[\boldsymbol{x}]\colon\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}.\tag{1}$$

Teorem 2. *$\sim$ bağıntısı, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının işlemlerine saygı gösterir, yani*

$$\boldsymbol{a}\sim\boldsymbol{c}\ \&\ \boldsymbol{b}\sim\boldsymbol{d}\implies\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\sim\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\ \&\ \boldsymbol{ab}\sim\boldsymbol{cd}.$$

Bu şekilde ${}^*\mathbb{R}$, iyitanımlanmış bir cisim olur. Ayrıca

$$[\boldsymbol{a}]<[\boldsymbol{b}]\iff\{k\in\mathbb{N}\colon a_k<b_k\}\ \textit{büyüktür}$$

kuralına göre ${}^*\mathbb{R}$, iyitanımlanmış sıralanmış *bir cisim olur. Bu sıralanmış cisme*

$$x\mapsto[x,x,x,\dots]$$

köşegen *gömmesi ile $\mathbb{R}$ gömülür.*

${}^*\mathbb{R}$ cisminin elemanlarına **gerçelüstü** (*hyperreal*) denebilir. Son teoremi kullanarak $\mathbb{R}$'yi ${}^*\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olarak düşüneceğiz; böylece her gerçel sayı, gerçelüstüdür.

4 Sonsuz ve sonsuzküçük sayılar

Gerçel bir sayı gibi her $[\boldsymbol{a}]$ gerçelüstü sayının,

$$\left.\begin{array}{ll}[\boldsymbol{a}] \geqslant 0 \text{ ise} & [\boldsymbol{a}] \\ [\boldsymbol{a}] < 0 \text{ ise} & -[\boldsymbol{a}]\end{array}\right\} = \big|[\boldsymbol{a}]\big|$$

kuralını sağlayan $\big|[\boldsymbol{a}]\big|$ **mutlak değeri** vardır. Eğer gerçelüstü bir sayının mutlak değeri

- *bir* pozitif gerçel sayıdan küçük ise, gerçelüstü sayıya **sonlu** densin;
- *her* pozitif gerçel sayıdan küçük ise, gerçelüstü sayıya **sonsuzküçük** (*infinitesimal*) densin.

Örnek 3. 0 sonsuzküçüktür.

Teorem 4. *0'dan farklı olan hiç gerçel sayı sonsuzküçük değildir.*

Örnek 5. $[k^{-1} \colon k \in \mathbb{N}]$, sonsuzküçük gerçelüstü bir sayıdır.

Tabii ki sonlu olmayan gerçelüstü bir sayı, **sonsuzdur.**

Örnek 6. $[k \colon k \in \mathbb{N}]$, sonsuz gerçelüstü bir sayıdır.

Teorem 7. *Sıfır olmayan bir $[\boldsymbol{a}]$ gerçelüstü sayısı için*

$$[\boldsymbol{a}] \textit{ sonsuzküçüktür} \iff [\boldsymbol{a}]^{-1} \textit{ sonsuzdur.}$$

5 Sonsuzyakınlık

Tanıma göre

$$[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{b}] \iff [\boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}] \text{ sonsuzküçüktür}$$

olsun. Eğer $[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{b}]$ ise $[\boldsymbol{b}]$, $[\boldsymbol{a}]$'ya **sonsuzyakındır** (*infinitely close*).

Teorem 8.

1. *${}^*\mathbb{R}$ cisminde $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*
2. *$[\boldsymbol{a}]$ sonsuzküçüktür $\iff$ $[\boldsymbol{a}] \approx 0$.*
3. *$[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{b}]$ $\iff$ $[\boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}] \approx 0$.*

Teorem 9. *İki farklı gerçel sayı sonsuzyakın olamaz.*

Teorem 10. *Bir gerçel sayıya sonsuzyakın olan her gerçelüstü sayı, sonludur.*

Teorem 11. *Her sonlu gerçelüstü sayı, bir gerçel sayıya sonsuzyakındır.*

Kanıt. Eğer $[\boldsymbol{a}]$ sonlu ise, o zaman $\{x \in \mathbb{R} \colon x < [\boldsymbol{a}]\}$ kümesinin b üst sınırı vardır. Bu durumda verilen küme $-b$ elemanını içerdiğinden boş değildir. O halde verilen kümenin supremumu vardır, ve bu supremum, $[\boldsymbol{a}]$'ya sonsuzyakındır. □

Kanıtta bulunan gerçel sayı, $[\boldsymbol{a}]$'nın **standart parçasıdır** (*standard part*).

Teorem 12. *Eğer $[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{b}] \approx [\boldsymbol{d}]$, ve $[\boldsymbol{e}]$ sonlu ise, o zaman*

$$[\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{b}] \approx [\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{d}], \qquad [\boldsymbol{a}][\boldsymbol{e}] \approx [\boldsymbol{c}][\boldsymbol{e}].$$

Sonlu gerçelüstü bir sayıya sonsuzyakın sayılar da sonludur.

Analiz

6 Limitler

Teorem 13. *Eğer $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ise, o zaman*

$$[\boldsymbol{x}] \mapsto [f(x_k) \colon k \in \mathbb{N}],$$

${}^*\mathbb{R}$*'den kendisine giden iyitanımlanmış bir fonksiyondur.*

Şimdi

$$^*f$$

olarak teoremde bulunan fonksiyonu yazalım; ayrıca a ve L, gerçel sayı olsun. Eğer her $[\boldsymbol{x}]$ gerçelüstü sayısı için

$$a \approx [\boldsymbol{x}] \;\;\&\;\; a \neq [\boldsymbol{x}] \implies {}^*f[\boldsymbol{x}] \approx L$$

gerektirmesi sağlanırsa, o zaman tanımımıza göre L, f'nin a'daki **limitidir.** Bu limiti

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{veya} \qquad \lim_a f$$

ile yazarız. Limit tanımımızın "standart" tanıma denk olduğunu, Bölüm 11'de Teorem 28'de kanıtlayacağız.

Teorem 14. *$\lim_a f = L$ ve $\lim_a g = M$ ise*

$$\lim_a (f+g) = L + M \;\;\&\;\; \lim_a (fg) = LM.$$

Kanıt. Eğer $[\boldsymbol{x}] \approx a$ ve $[\boldsymbol{x}] \neq a$ ise, o zaman varsayıma göre

$$^*f[\boldsymbol{x}] \approx L, \qquad\qquad {}^*g[\boldsymbol{x}] \approx M.$$

Özellikle Teorem 10 sayesinde $^*f[\boldsymbol{x}]$ sonludur. Şimdi Teorem 12 sayesinde

$$^*f[\boldsymbol{x}] + {}^*g[\boldsymbol{x}] \approx L + M, \qquad {}^*f[\boldsymbol{x}]\,{}^*g[\boldsymbol{x}] \approx {}^*f[\boldsymbol{x}]M \approx LM. \quad \square$$

7 Süreklilik

Eğer her a gerçel sayısı için $f(a) = \lim_a f$ ise, o zaman f **süreklidir.**

Teorem 15. *f'nin sürekli olması için gerek ve yeter bir koşul, tüm sonlu $[\boldsymbol{x}]$ ve $[\boldsymbol{y}]$ gerçelüstü sayıları için*

$$[\boldsymbol{x}] \approx [\boldsymbol{y}] \implies {}^*f[\boldsymbol{x}] \approx {}^*f[\boldsymbol{y}].$$

Örnek 16. Eğer $f(x) = x^2$ ise, o zaman f süreklidir, ama Örnek 5'teki gibi $[k^{-1} \colon k \in \mathbb{N}]$ gerçelüstü sayısının sonsuzküçük olduğu halde

$${}^*f[k + k^{-1} \colon k \in \mathbb{N}] = {}^*f[k \colon k \in \mathbb{N}] + 2.$$

Teorem 17 (Aradeğer). *f sürekli, $a < b$, ve $f(a) < c < f(b)$ olsun. O zaman bir d için $a < d < b$ ve $f(d) = c$.*

Kanıt. İstediğimiz d gerçel sayısı, bir $[d_n \colon n \in \mathbb{N}]$ gerçelüstü sayısının standart parçası olacak. *Özyineleme* ile $(d_n \colon n \in \mathbb{N})$ dizisini tanımlayacağız. Önce

$$\delta_1 = b - a$$

olsun, ve bir m için δ_m tanımlanmış ise

$$\delta_{m+1} = \frac{\delta_m}{2}$$

olsun. Kısaca her n sayma sayısı için

$$\delta_n = \frac{b - a}{2^{n-1}}$$

olsun. Şimdi

$$d_1 = a$$

olsun. O zaman $n = 1$ durumunda

$$a \leqslant d_n < d_n + \delta_n \leqslant b, \qquad f(d_n) \leqslant c < f(d_n + \delta_n) \tag{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Şimdi bir m sayma sayısı için $n = m$ durumunda (2) eşitsizliklerinin sağlandığını varsayalım. O zaman

$$\left.\begin{array}{ll} f(d_m + \delta_{m+1}) \leqslant c \text{ ise} & d_m + \delta_{m+1} \\ c < f(d_m + \delta_{m+1}) \text{ ise} & d_m \end{array}\right\} = d_{m+1}$$

olsun. Bu durumda $n = m + 1$ durumunda (2) eşitsizlikleri sağlanır.

Özyineleme ile her n için d_n tanımlanmıştı. Tümevarımdan her n için (2) eşitsizlikleri sağlanır. O zaman

$$^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}] \leqslant c < {}^*f[d_n + \delta_n \colon n \in \mathbb{N}],$$

ama $[\delta_n \colon n \in \mathbb{N}]$ sonsuzküçüktür. Teorem 15 sayesinde

$$^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}] \approx {}^*f[d_n + \delta_n \colon n \in \mathbb{N}].$$

Sonuç olarak

$$^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}] \approx c.$$

Şimdi d, $[d_n \colon n \in \mathbb{N}]$ gerçelüstü sayısının standart parçası olsun. O zaman

$$f(d) \approx {}^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}],$$

dolayısıyla $f(d) = c$. □

Teorem 18 (Sınırlılık)**.** *f sürekli ve $a < b$ olsun. O zaman $\mathbb{R}$'nin $\{f(x) \colon a \leqslant x \leqslant b\}$ altkümesi sınırlıdır.*

Kanıt. Sınırlı olmasın. O zaman her n için, bir c_n için,

$$a \leqslant c_n \leqslant b, \qquad |f(c_n)| > n.$$

O zaman $^*f[\boldsymbol{c}]$ sonsuzdur. Eğer $[\boldsymbol{c}]$ gerçelüstü sayısının standart parçası c ise, o zaman $f(c)$ sonlu olduğundan f sürekli olamaz. □

Teorem 19 (Maksimum-minimum)**.** *f sürekli ve $a < b$ olsun. O zaman bazı c ve d için,*

$$a \leqslant c \leqslant b, \qquad\qquad a \leqslant d \leqslant b,$$

ve ayrıca her x için,

$$a \leqslant x \leqslant b \implies f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

8 Türevler

Tanıma göre
$$\lim_{x\to a} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(a).$$
Burada f' fonksiyonu, f'nin **türevidir.** O halde

$$[\boldsymbol{h}] \approx 0 \ \& \ [\boldsymbol{h}] \neq 0 \implies \frac{{}^*f(x + [\boldsymbol{h}]) - f(x)}{[\boldsymbol{h}]} \approx f'(x).$$

Bu nedenle f' fonksiyonu

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}$$

olarak yazılabilir. Tabii ki f'nin türevi olmayabilir.

Teorem 20. $\mathrm{d}\, 1/ \mathrm{d}\, x = 0$ *ve* $\mathrm{d}\, x/ \mathrm{d}\, x = 1$.

Teorem 21. $(f + g)' = f' + g'$.

Teorem 22. $(fg)' = f'g + fg'$.

Kanıt. Teorem 14'ü kullanarak

$$\frac{f(a)g(a) - f(x)g(x)}{a - x} = f(a)\frac{g(a) - g(x)}{a - x} + \frac{f(a) - f(x)}{a - x}g(x)$$

eşitliğinden istediğimiz sonucu elde ederiz. □

Örnek 23. Teoremler 20, 21, ve 22 sayesinde

$$\frac{\mathrm{d}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)}{\mathrm{d}\, x} = a_1 + a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Burada $a_1 + a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$,

$$f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

denkliğinin tanımladığı teorem olarak anlaşılır.

Teorem 24. *Eğer f'nin türevi varsa, o zaman f süreklidir.*

9 Integraller

Doğal sayılar kümesi ω (*omega*) ile yazalım. O zaman

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

${}^*\mathbb{R}$'nin (1) tanımında $\mathbb{R}$'nin yerine sırasıyla $\mathbb{N}$ ve ω konularak ${}^*\mathbb{N}$ ve ${}^*\omega$ elde edilir. O zaman

$${}^*\omega = \{0\} \cup {}^*\mathbb{N}.$$

Burada ${}^*\omega$'nın elemanlarına **doğalüstü sayı** densin; Her doğal sayı, doğalüstü olarak düşünebilir.

Tanım kümesi bir $[a, b]$ kapalı sınırlı aralığını kapsayan bir f fonksiyonu için, eğer bir n sayma sayısı için bazı x_i gerçel sayıları

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

koşulunu sağlarsa, o zaman $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ kümesi, $[a, b]$ aralığinin bir **parçalanmasıdır.** Eğer ayrıca t_i gerçel sayıları

$$x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i$$

koşulunu sağlarsa, o zaman

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{3}$$

toplamı, $[a, b]$ aralığında f'nin bir **Riemann toplamıdır.**

Şimdi girdileri sayma sayısı olan bir $\boldsymbol{n}$ dizisi için, girdileri $[a, b]$ aralığında f'nin Riemann toplamları olan bir

$$\left(\sum_{i=1}^{n_k} f(t_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1})\colon k \in \mathbb{N}\right)$$

dizisi verilsin. O zaman

$$\boldsymbol{t_i} = (t_{k,i_k}\colon k \in \mathbb{N}), \qquad \boldsymbol{x_i} = (x_{k,i_k}\colon k \in \mathbb{N}),$$

ve

$$\boldsymbol{x_{i-1}} = (x_{k,i_k-1}\colon k \in \mathbb{N})$$

tanımlanabilir. Burada bir k için girdiler tanımsız olabilir, ama $1 \leqslant i_k \leqslant n_k$ ise tanımlıdır, ve $1 \leqslant [\boldsymbol{i}] \leqslant [\boldsymbol{n}]$ ise

$$\{k \in \mathbb{N}\colon i_k \leqslant n_k\}$$

kümesi büyüktür. Bu durumda $[\boldsymbol{t_i}]$, $[\boldsymbol{x_i}]$, ve $[\boldsymbol{x_{i-1}}]$ iyitanımlıdır, ve

$$[\boldsymbol{x_{i-1}}] \leqslant [\boldsymbol{t_i}] \leqslant [\boldsymbol{x_i}].$$

Ayrıca

$$[\boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{j}] \implies [\boldsymbol{t_i}] = [\boldsymbol{t_j}] \ \& \ [\boldsymbol{x_i}] = [\boldsymbol{x_j}] \ \& \ [\boldsymbol{x_{i-1}}] = [\boldsymbol{x_{j-1}}].$$

Şimdi

$$\left[\sum_{i=1}^{n_k} f(t_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1})\colon k \in \mathbb{N}\right]$$

gerçelüstü sayısı

$$\sum_{[\boldsymbol{i}]=1}^{[\boldsymbol{n}]} {}^*f[\boldsymbol{t_i}]([\boldsymbol{x_i}] - [\boldsymbol{x_{i-1}}])$$

toplamı olarak ve kısaca

$$\mathrm{RT}(f, T, X)$$

yazılabilir. Eğer her durumda

$$[\boldsymbol{x_i}] \approx [\boldsymbol{x_{i-1}}]$$

ise, o zaman toplam, $[a, b]$ aralığında f'nin **sonsuz bir Riemann toplamı** densin. O zaman

$$\{[\boldsymbol{x}_0], [\boldsymbol{x}_1], \dots, [\boldsymbol{x_n}]\}$$

kümesi, yani

$$\{[\boldsymbol{x_i}] \colon [\boldsymbol{i}] \in {}^*\omega \;\;\&\;\; [\boldsymbol{i}] \leqslant [\boldsymbol{n}]\}$$

kümesi, $[a, b]$ aralığının **sonsuz bir parçalanmasıdır.**

Eğer $[a, b]$ aralığında f'nin her sonsuz Riemann toplamı aynı I gerçel sayısına sonsuzyakın ise, o zaman I, $[a, b]$ aralığında f'nin **integralidir,** ve

$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

yazılır.

Teorem 25. *Eğer bir fonksiyon bir aralıkta sürekli ise o aralıkta fonksiyonun integrali vardır.*

Kanıt. Bir $\mathrm{RT}(f,T,X)$ sonsuz Riemann toplamı verilsin. Teorem 19 sayesında her $[x_{k,i-1},x_{k,i}]$ aralığında f'nin en küçük değeri bir $c_{k,i}$ noktasında ve en büyuk değeri bir $d_{k,i}$ noktasında alınır. Bu durumda

$$\mathrm{RT}(f,C,X)=\mathrm{RT}_*(f,X),\qquad \mathrm{RT}(f,D,X)=\mathrm{RT}^*(f,X)$$

olsun. O zaman

$$\mathrm{RT}_*(f,X)\leqslant\mathrm{RT}(f,T,X)\leqslant\mathrm{RT}^*(f,X).$$

Ayrıca her k için, bir j_k için,

$$\operatorname*{maks}_{1\leqslant i\leqslant n_k}(f(d_{k,i})-f(c_{k,i}))=f(d_{k,i_k})-f(c_{k,i_k}),$$

dolayısıyla

$$\mathrm{RT}^*(f,X)-\mathrm{RT}_*(f,X)\leqslant({}^*f[\boldsymbol{d_j}]-{}^*f[\boldsymbol{c_j}])(b-a).$$

Ayrıca $[\boldsymbol{d_j}]$ ve $[\boldsymbol{c_j}]$ sonsuzyakındır, çünkü $[\boldsymbol{x_{j-1}}]$ ve $[\boldsymbol{x_j}]$'nin arasındadır. Bundan dolayı f sürekli olduğundan

$${}^*f[\boldsymbol{d_j}]-{}^*f[\boldsymbol{c_j}]\approx 0,$$

ve sonuç olarak

$$\mathrm{RT}_*(f,X)\approx\mathrm{RT}(f,T,X)\approx\mathrm{RT}^*(f,X).$$

Eğer farklı bir Y sonsuz parçalanması verilirse, o zaman

$$\mathrm{RT}_*(f,X)\leqslant\mathrm{RT}_*(f,X\cup Y)\leqslant\mathrm{RT}^*(f,X\cup Y)\leqslant\mathrm{RT}^*(f,X)$$

Bundan dolayı $[a,b]$ aralığında f'nin bütün sonsuz Riemann toplamı sonsuzyakındır. □

Tanıma göre

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Teorem 26.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorem 27. *Eğer f sürekli ise, o zaman*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\int_a^x f = f.$$

Kanıt. $F(x) = \int_a^x f$ olsun, ve $[\boldsymbol{h}]$, sıfır olmasın ama sonsuz-küçük olsun. Eğer $h_k \neq 0$ ise, o zaman f sürekli olduğundan $[x, x+h_k]$ veya $[x+h_k, x]$ aralığında, f en küçük değerini bir c_k noktasında, ve en büyük değerini bir d_k noktasinda, alır. O zaman

$$f(c_k) \leqslant \frac{F(x+h_k)}{h_k} \leqslant f(d_k),$$

dolayısıyla

$$^*f[\boldsymbol{c}] \leqslant \frac{^*F(x+[\boldsymbol{h}])}{[\boldsymbol{h}]} \leqslant {^*f}[\boldsymbol{d}].$$

İstediğimiz sonuç çıkar çünkü $[\boldsymbol{c}] \approx x \approx [\boldsymbol{d}]$. □

Ek

10 Cebir

Cebir açısından ℕ'nin altkümeleri, bir *Boole halkası* oluşturur, ve ℕ'nin küçük altkümeleri, o halkanın asal bir ideali (*prime ideal*) oluşturur. Her halkanın asal bir ideali var olduğu, Seçim

Aksiyomu ile kanıtlanabilir, ama bu aksiyomdan az güçüdür [2].

Ayrıca $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon x \sim 0\}$ kümesi, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının asıl olmayan (*non-principal*) asal bir idealidir, ve

$$^{*}\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon x \sim 0\}.$$

Eğer tam tersine P, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının asıl olmayan asal bir ideali ise, o zaman $\mathbb{N}$'nin küçük altkümeleri, P'nin a elemanları için

$$\{k \in \mathbb{N} \colon a_k \neq 0\}$$

olarak tanımlanabilir.

$^{*}\mathbb{R}$ cisminin sonlu elemanları, bir $\mathfrak{O}$ değerlendirme halkası (*valuation ring*) oluşturur, ve bunun $\mathfrak{M}$ maksimal idealinin elemanları, $^{*}\mathbb{R}$'nin sonsuzküçük elemanlarıdır. Bu durumda tanım kümesi $\mathbb{R}$ olan

$$x \mapsto [x, x, x, \dots] + \mathfrak{M}$$

göndermesi, $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ üstüne bir φ izomorfizmasıdır, ve $[\boldsymbol{a}]$ sonlu ise $\varphi^{-1}([\boldsymbol{a}] + \mathfrak{M})$, $[\boldsymbol{a}]$'nın standart parçasıdır.

11 Epsilon-delta tanımı

Teorem 28. *f'nin a'daki limitinin L olması için* $\lim_a f = L$ *gerek ve yeter bir koşul, $\mathbb{R}$'de her pozitif ε için, bir pozitif δ için, her x için*

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kanıt. İlk olarak verilen koşulun doğru olmasını varsayalım. Bir $\boldsymbol{x}$ *dizisi* için $[\boldsymbol{x}] \approx a$ ama $[\boldsymbol{x}] \neq a$ olsun. O halde $^{*}f[\boldsymbol{x}] \approx$

L göstereceğiz. Şimdi ε, pozitif gerçel bir sayı olsun; $\{k \in \mathbb{N} \colon |f(x_k) - L| < \varepsilon\}$ kümesinin büyük olduğunu göstermek yeter. Varsayıma göre pozitif gerçel bir δ için o küme $\{k \in \mathbb{N} \colon 0 < |x_k - a| < \delta\}$ kümesini kapsar; ayrıca bu küme büyüktür.

Tam tersine ε, pozitif gerçel bir sayı olsun. Mümkünse her pozitif gerçel δ için, gerçel bir x için,

$$0 < |x - a| < \delta \ \ \& \ \ |f(x) - L| \geqslant \varepsilon$$

olsun. O zaman bir $\boldsymbol{x}$ *dizisi* için her k sayma sayısı için

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k} \ \ \& \ \ |f(x_k) - L| \geqslant \varepsilon.$$

Bu durumda $[\boldsymbol{x}] \approx a$ ve $[\boldsymbol{x}] \neq a$, ama ${}^*f[\boldsymbol{x}] \not\approx L$. □

Kaynaklar

[1] René Descartes. *La Géométrie.* Jacques Gabay, Sceaux, France, 1991. Reprint of Hermann edition of 1886.

[2] J. D. Halpern and A. Lévy. The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In *Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967)*, pages 83–134. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[3] James M. Henle and Eugene M. Kleinberg. *Infinitesimal calculus.* Dover Publications, Mineola, NY, 2003. Reprint of the 1979 original [MIT Press, Cambridge, MA].

[4] David Hilbert. *Foundations of Geometry.* Open Court, La Salle, Illinois, 1971. Second English edition, translated by Leo Unger from the Tenth German edition, revised and enlarged by Paul Bernays.

[5] H. Jerome Keisler. *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. 2013. First edition 1976, second edition 1986, both by Prindle, Weber & Schmidt. Published online at www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html.

[6] Öklid. *Öğelerin 13 Kitabından Birinci Kitap*. Matematik Bölümü, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul, 4 edition, Eylül 2014. Öklid'in Yunanca metni ve Özer Öztürk & David Pierce'in çevirdiği Türkçesi.

[7] David Pierce. Thales and the nine-point conic. *The De Morgan Gazette*, 8(4):27–78, 2016. education.lms.ac.uk/2016/12/thales-and-the-nine-point-conic/, accessed June 1, 2017.

[8] Abraham Robinson. *Non-standard Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. Reprint of the second (1974) edition. With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg. First edition 1965.