Sonsuzküçük Analiz

Infinitesimal Analysis

David Pierce

17 Şubat 2020

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/`
`david.pierce@msgsu.edu.tr`

Okura Not

Bu metinde, gerçel analizin temel kavramlarını ve teoremlerini "standart olmayan," *sonsuzküçük* yöntemi ile en basit şekilde açıklamaya çalışıyorum.

Bölüm 4'te Spivak'ın "üç zor teoremi" [8, sayfa 108], Teoremler 27, 28, ve 29 olur.

Öğrencilerden bazısı "standart," *epsilon-delta* yöntemi, bazısı sonsuzküçük yöntemi tercih edebilir. Bundan dolayı bir öğretmen, yöntemlerin ikisini bilmek zorundadır.

Epsilon-delta ve sonsuzküçük yöntemlerin denkliğini, Bölüm 1'den sonra, sadece Bölüm 6'da bahsedeceğim.

Metinde bir teoremin kanıtı yoksa, teoremi kanıtlamayı size bırakmıştım.

Teknik terimler, *italik* olabildiği halde tanımlanınca **siyahtır.** İngilizceden gelen terimler, *eğimlidir.*

Abraham Robinson sonsuzküçük yöntemi sert (*rigorous*) bir şekilde meydana koydu [7]. Keisler [6, 5] ve Henle ile Kleinberg [3] tarafından yazılmış sonsuzküçük yöntemi kullanan ders kitapları vardır.

İçindekiler

1 Giriş

Epsilon–delta yöntemini kullanmadan limitleri tanımlayıp kalkülüsün temel teoremlerini kanıtlayacağız.

Geleneksel, "standart" tanıma göre bir a noktasında bir f fonksiyonunun limitinin L olması için, yani

$$\lim_{a} f = L$$

için,

$$\forall\varepsilon\ \Big(\varepsilon > 0 \to \exists\delta\ \big(\delta > 0 \land \forall x \\ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)\big)\Big)$$

koşulu yeter ve gerektir. *Önekli yasal biçimde* koşul

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x\ \big(\varepsilon > 0 \to \delta > 0 \land \\ (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)\big) \quad (1)$$

olur. Burada üç niceleyici vardır: $\forall\varepsilon$, $\exists\delta$, ve $\forall x$. Koşul (1)'in yerine niceleyicilerden ikisini çıkararak

$$\forall[\boldsymbol{x}]\ ([\boldsymbol{x}] \approx a \land [\boldsymbol{x}] \neq a \to {}^*f[\boldsymbol{x}] \approx L) \quad (2)$$

koşulunu kullanacağız. Burada

- $\boldsymbol{x}$, bir $(x_k \colon k \in \mathbb{N})$ dizisidir;
- bir D denklik bağıntısına göre $[\boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{x}$'in denklik sınıfıdır;

- $\boldsymbol{x}\ D\ \boldsymbol{y}$ için $\{k \in \mathbb{N}\colon x_k \neq y_k\}$ kümesinin sonlu olması yeter;

- a, $(a, a, a, \dots)$ sabit dizisinin $[a, a, a, \dots]$ denklik sınıfı olarak sayılır;

- ${}^*f[\boldsymbol{x}] = [f(x_k)\colon k \in \mathbb{N}]$;

- $\approx$, *sonsuzyakınlık* denklik bağıntısıdır;

- $[\boldsymbol{x}] \approx [\boldsymbol{y}]$ için $\{k \in \mathbb{N}\colon |x_k - y_k| \geqslant 1/n\}$ kümesinin her n sayma sayısı için sonlu olması yeter.

Yukarıda $\boldsymbol{x}\ D\ \boldsymbol{y}$ ve $[\boldsymbol{x}] \approx [\boldsymbol{y}]$ için verilen yeter koşullar gerekli de olarak alınırsa, o zaman koşullar (1) ve (2) denktir. Aslında kullanacağımız tanıma göre

- $\boldsymbol{x}\ D\ \boldsymbol{y}$ için $\{k \in \mathbb{N}\colon x_k = y_k\}$ kümesinin *büyük* olması gereklidir;

- $[\boldsymbol{x}] \approx [\boldsymbol{y}]$ için $\{k \in \mathbb{N}\colon |x_k - y_k| < 1/n\}$ kümesinin her n sayma sayısı için büyük olması gereklidir.

Burada $\mathbb{N}$'nin altkümelerinden

1) hiç sonlu küme büyük değildir;

2) büyük olmayan bir kümenin tümleyeni büyüktür;

3) iki büyük kümenin kesişimi de büyüktür.

Bu tanım altında $[\boldsymbol{x}]$ sınıfları $\mathbb{R}$'yi kapsayan, $\mathbb{R}$'nin bazı özelliklerini paylaşan, *doğrusal sıralanmış bir cismi* oluşturur.

2 Gerçel sayılar

2.1 Gerçel sayılar

Tam doğrusal sıralanmış bir $\mathbb{R}$ *cisminin* var olduğunu varsayıyoruz; $\mathbb{R}$'nin elemanları, **gerçel sayılardır** (veya *reel sayılardır*).

1. **Doğrusal sıralanmış** olduğundan $\mathbb{R}$'nin elemanları, bir doğru oluşturur. Eğer a, b'nin solunda ise, $a < b$ veya $b > a$ yazılır. Bu durumda a, b'den **küçüktür** ve b, a'dan **büyüktür.** Her durumda
$$\begin{gathered} a \nless a, \\ a < b \wedge b < c \to a < c, \\ a < b \vee a = b \vee a > b. \end{gathered}$$

2. Doğru olarak $\mathbb{R}$ **tam** olduğundan, eğer Şekil 1'deki gibi gerçel sayılar doğrusu iki parçaya kırılırsa, o zaman parçaların birinin uç noktası vardır. Demek $\mathbb{R}$'nin her boş olmayan, üstsınırı olan A altkümesinin en küçük üstsınırı veya **supremumu** vardır, yani
$$\begin{aligned} &\exists x\ x \in A \wedge \exists x\ \forall y\ (y \in A \to y \leqslant x) \to \\ &\qquad \exists x\ \Big(\forall y\ (y \in A \to y \leqslant x) \wedge \\ &\qquad\qquad \forall y\ \big(\forall z\ (z \in A \to z \leqslant y) \to x \leqslant y\big)\Big) \end{aligned}$$

Şekil 1: Gerçel sayıların tamlığı

veya

$$\begin{gathered}\exists x_0\ x_0 \in A \wedge \exists x_1\ \forall x_2\ (x_2 \in A \to x_2 \leqslant x_1) \to \\ \exists x_3\ \Big(\forall x_4\ (x_4 \in A \to x_4 \leqslant x_3) \wedge \\ \forall x_5\ \big(\forall x_6\ (x_6 \in A \to x_6 \leqslant x_5) \to x_3 \leqslant x_5\big)\Big)\end{gathered}$$

veya

$$\begin{gathered}\forall(x_0, x_1)\ \exists(x_2, x_3)\ \forall(x_4, x_5)\ \exists x_6 \\ \Big(x_0 \in A \wedge (x_2 \in A \to x_2 \leqslant x_1) \to \\ (x_4 \in A \to x_4 \leqslant x_3) \wedge \\ \big((x_6 \in A \to x_6 \leqslant x_5) \to x_3 \leqslant x_5\big)\Big).\end{gathered}$$

$\mathbb{R}$'nin tamlığını Teorem 11'de kullanacağız.

3. $\mathbb{R}$ bir **cisim** olduğundan toplama ve çarpma işlemi vardır, ve ayrıca
   a) toplama altında $\mathbb{R}$ **abelyan bir gruptur,** yani her durumda

$$\begin{gathered}a + b = b + a, \\ a + (b + c) = (a + b) + c, \\ a + 0 = a, \\ a + (-a) = 0;\end{gathered}$$

b) çarpma altında $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ abelyan bir gruptur, dolayısıyla her durumda

$$\begin{aligned} ab &= ba, \\ a(bc) &= (ab)c, \\ a \cdot 1 &= a, \\ a \cdot a^{-1} &= 1; \end{aligned}$$

c) toplama üzerinde çarpma dağılır, yani

$$a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

4. 0'dan büyük olan gerçer sayılar **pozitiftir;** küçük olan, **negatiftir.**

5. $\mathbb{R}$ **doğrusal sıralanmış bir cisim** olduğundan iki pozitif elemanların toplamı ve çarpımı da pozitiftir, yani

$$a > 0 \wedge b > 0 \to a + b > 0 \wedge ab > 0.$$

2.2 Sayma sayıları

$\mathbb{R}$'nin

1) $1 \in A$,

2) $\forall x\ (x \in A \to x + 1 \in A)$

koşulunu sağlayan bir A altkümesi **tümevarımlıdır.** $\mathbb{R}$'nin en küçük tümevarımlı altkümesi, $\mathbb{N}$ olur, ve onun elemanları, **sayma sayılarıdır.** Tanımdan eğer $\mathbb{N}$'nin bir A altkümesi tümevarımlı ise, o zaman $A = \mathbb{N}$ olur: o kanıtlama yöntemi, **tümevarımdır.**

Teorem 1. $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{x + 1 \colon x \in \mathbb{N}\}$.

Kanıt. $\{1\} \cup \{x+1 \colon x \in \mathbb{N}\}$ hem tümevarımlıdır, hem de $\mathbb{N}$'nin bir altkümesidir. $\square$

Teorem 2. $\mathbb{N}$ ***iyisıralıdır,*** *yani $\mathbb{N}$'nin her boş olmayan altkümesinin en küçük elemanı vardır.*

Teorem 3. *$\mathbb{N}$'de eğer $k < n$ ise, o zaman $k + 1 \leqslant n$.*

Kanıt. Mümkünse $\{x \in \mathbb{N} \colon \exists y\ (y \in \mathbb{N} \land x < y < x + 1)\}$ boş olmasın. Teorem 2'den kümenin en küçük elemanı k olsun. O zaman $\{x \in \mathbb{N} \colon x \leqslant k \lor k \leqslant x\}$, tümevarımlıdır. $\square$

Teorem 4 (Özyineleme). *$A \subseteq \mathbb{R}$, $b \in A$, ve $f \colon \mathbb{N} \times A \to A$ olsun. O zaman bir ve tek bir g için*

- *$g \colon \mathbb{N} \to A$,*
- *$g(1) = b$,*
- *her n sayma sayısı için*

$$g(n + 1) = f(n, g(n)).$$

Kanıt. Önce g'nin tek olduğunu göstereceğiz. Eğer g_1 ve g_2, g'nin özelliklerini sağlarsa, o zaman

- g_1'in ve g_2'nin tanım kümesi $\mathbb{N}$'dir,
- $g_1(1) = b = g_2(1)$,
- her n sayma sayısı için

$$\begin{aligned} &g_1(n) = g_2(n) \to \\ &\quad g_1(n + 1) = f(n, g_1(n)) = f(n, g_2(n)) = g_2(n + 1). \end{aligned}$$

Böylece $\{x\colon g_1(x) = g_2(x)\}$ kümesi, hem $\mathbb{N}$'nin bir altkümesidir, hem de tümevarımlıdır. Sonuç olarak o küme $\mathbb{N}$'dir, dolayısıyla $g_1 = g_2$ olur.

Benzer şekilde her n sayma sayısı için, en çok bir h_n için,

- $h_n\colon \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$,
- $h_n(1) = b$,
- eğer $1 \leqslant k < n$ ise, o zaman
$$h_n(k+1) = f(h_n(k)).$$

Ayrıca en az bir h_n'nin verilen özellikleri vardır, çünkü

1) $h_1 = \{(1, b)\}$ olabilir,

2) eğer bir m için h_m varsa, o zaman Teorem 3 sayesinde
$$h_{m+1} = h_m \cup \Big\{ \Big(m+1, f\big(m, h_m(m)\big)\Big) \Big\}$$
olabilir.

Şimdi her n için
$$g(n) = h_n(n)$$
olsun. □

2.3 Arşimet özelliği

Tanıma göre
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x\colon x \in \mathbb{N}\},$$

ve $\mathbb{Z}$'nin elemanları, **tamsayılardır.** Hem toplama hem de çarpma altında kapalı olduğundan ve 1'i içerdiğinden $\mathbb{Z}$ bir **halkadır.** Eğer $\mathbb{R}$'de $\mathbb{Z}$'nin a üstsınırı varsa, o zaman $a-1$ de $\mathbb{Z}$'nin a üstsınırıdır. Bundan dolayı $\mathbb{Z}$'nin supremumu yoktur. Sonuç olarak $\mathbb{R}$'de $\mathbb{Z}$, sınırlı değildir. Böylece $\mathbb{R}$'nin **Arşimet özelliği** vardır.

Öklid düzleminde Öklid'in *Öğeler*'indeki gibi iki doğru parçası *eşit* olabilir. Bu eşitlikten iki *yönlendirilmiş* doğru parçasının eşitliğini elde edebiliriz. Aslında eğer $ABCD$ bir paralelkenar ise, o zaman $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; eğer ayrıca E ve F, AB doğrusunda ve $ABEF$ de bir paralelkenar ise, o zaman $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. Eşitliğe göre yönlendirilmiş bir doğru parçasının denklik sınıfı, bir *vektördür.* İki vektör toplanabilir, ve vektörler abelyan bir grubu oluşturur.

iki paralel vektör karşılaştırılabilir. Arşimet özelliğine göre daha küçüğünün bir katı, diğerinden büyüktür.

İki paralel vektörün *oranı* vardır. *Öğeler*'in 5. ve 6. kitabında bulunan orantılar kuramına göre oranlar, *Thales Teoremi*'ni sağlar. Bir vektörü *birim* olarak tanımlayarak, birime paralel olan iki vektörün çarpımını tanımlayarak, Descartes, sıralanmış bir cismi elde etti [1]. Arşimet özelliğini kullanmadan Hilbert, aynı sonucu elde etti [4].

3 Gerçelüstü sayılar

3.1 Büyük kümeler

Her elemanı $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olan, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathscr{A}$ kümesi, $\mathbb{N}$ üzerinde bir **filtredir:**

1. $\mathbb{N} \in \mathscr{A}$.

2. $\emptyset \notin \mathscr{A}$.

3. $B \in \mathscr{A} \wedge B \subseteq C \subseteq \mathbb{N} \to C \in \mathscr{A}$.

4. $B \in \mathscr{A} \wedge C \in \mathscr{A} \to B \cap C \in \mathscr{A}$.

Örneğin $\mathbb{N}$'nin altkümesi olan, tümleyeni sonlu olan kümeler, $\mathbb{N}$ üzerinde **Fréchet filtresini** oluşturur. Sayfa 36'da bahsedilen *Zorn Lemması*'na göre $\mathbb{N}$ üzerinde Fréchet filtresini kapsayan, **maksimal** (daha büyüğü olmayan) filtreler vardır.

İlk ve son olarak $\mathbb{N}$ *üzerinde maksimal bir filtre seçilsin.* Elemanlarına **büyük** (veya *çoğunluk*) densin, ve $\mathbb{N}$'nin diğer altkümelerine **küçük** densin. O zaman

- $\mathbb{N}$'nin her altkümesi ya büyük ya da küçüktür, ama ikisi değildir;

- $\mathbb{N}$'nin büyük bir altkümesinin tümleyeni küçüktür.

3.2 Diziler ve denklikleri

$\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon, bir **dizidir.** Diziler

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

kümesini oluşturur. Aynı dizi

- ya $(a_k \colon k \in \mathbb{N})$,
- ya da $(a_1, a_2, a_3, \dots)$,
- ya da kısaca $\boldsymbol{a}$

olarak yazılır. Girdilerine göre iki dizinin toplamını ve çarpımını

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_k + b_k \colon k \in \mathbb{N}), \qquad \boldsymbol{ab} = (a_k b_k \colon k \in \mathbb{N})$$

kurallarını kullanarak tanımlarız. Şimdi tanıma göre

$$\boldsymbol{a} \; D \; \boldsymbol{b} \leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \colon a_k = b_k\} \text{ büyüktür} \tag{3}$$

olsun.

Teorem 5. *D bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

Verilen D bağıntısına göre bir $\boldsymbol{a}$ dizisinin denklik sınıfı $[\boldsymbol{a}]$ olarak yazılsın. Böylece

$$[\boldsymbol{a}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \boldsymbol{a} \; D \; \boldsymbol{x}\}.$$

Bütün dizilerin denklik sınıfları, ${}^*\mathbb{R}$ kümesini oluştursun. Böylece

$${}^*\mathbb{R} = \{[\boldsymbol{x}] \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}. \tag{4}$$

Teorem 6. *D bağıntısı, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının işlemlerine saygı gösterir, yani*

$$\boldsymbol{a}\ D\ \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b}\ D\ \boldsymbol{d} \to \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\ D\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{ab}\ D\ \boldsymbol{cd}.$$

Bu şekilde ${}^*\mathbb{R}$, iyitanımlanmış bir cisim olur. Ayrıca

$$[\boldsymbol{a}] < [\boldsymbol{b}] \leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \colon a_k < b_k\} \text{ büyüktür}$$

kuralına göre ${}^*\mathbb{R}$, iyitanımlanmış sıralanmış *bir cisim olur. Bu sıralanmış cisme*

$$x \mapsto [x, x, x, \dots]$$

***köşegen gömmesi** ile $\mathbb{R}$ gömülür.*

${}^*\mathbb{R}$ cisminin elemanlarına **gerçelüstü** (*hyperreal*) denebilir. ${}^*\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olarak $\mathbb{R}$'yi, Teorem 6'yı kullanarak düşüneceğiz; böylece her gerçel sayı, gerçelüstüdür.

3.3 Sonsuz ve sonsuzküçük sayılar

Her gerçel sayı gibi her $[\boldsymbol{a}]$ gerçelüstü sayısının,

$$\left.\begin{array}{ll} [\boldsymbol{a}] \geqslant 0 \text{ ise} & [\boldsymbol{a}] \\ [\boldsymbol{a}] < 0 \text{ ise} & -[\boldsymbol{a}] \end{array}\right\} = \big|[\boldsymbol{a}]\big|$$

kuralını sağlayan $\big|[\boldsymbol{a}]\big|$ **mutlak değeri** vardır. Eğer gerçelüstü bir sayının mutlak değeri

- *bir* pozitif gerçel sayıdan küçük ise, o zaman gerçelüstü sayıya **sonlu** densin;
- *her* pozitif gerçel sayıdan küçük ise, o zaman gerçelüstü sayıya **sonsuzküçük** (*infinitesimal*) densin.

Örnek 1. 0 sonsuzküçüktür, ama hiç başka gerçel sayı sonsuzküçük değildir.

Sonlu olmayan gerçelüstü bir sayı, **sonsuzdur.**

Örnek 2. $[k\colon k \in \mathbb{N}]$, sonsuz gerçelüstü bir sayıdır. Sonuç olarak ${}^*\mathbb{R}$'nin Arşimet özelliği yoktur.

Örnek 3. $[k^{-1}\colon k \in \mathbb{N}]$, sonsuzküçük gerçelüstü bir sayıdır.

Teorem 7. *Sıfır olmayan bir* $[\boldsymbol{a}]$ *gerçelüstü sayısı için*

$$[\boldsymbol{a}] \textit{ sonsuzküçüktür} \leftrightarrow [\boldsymbol{a}]^{-1} \textit{ sonsuzdur.}$$

3.4 Sonsuzyakınlık

Tanıma göre

$$[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{b}] \leftrightarrow [\boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}] \text{ sonsuzküçüktür}$$

olsun.

Teorem 8.

1. ${}^*\mathbb{R}$ *cisminde* $\approx$ *bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*
2. $[\boldsymbol{a}] \approx 0 \leftrightarrow [\boldsymbol{a}]$ *sonsuzküçüktür.*
3. $[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{b}] \leftrightarrow [\boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}] \approx 0.$

Eğer $[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{b}]$ ise, o zaman $[\boldsymbol{a}]$ ve $[\boldsymbol{b}]$ birbirine **sonsuzyakındır** (*infinitely close*).

Örnek 4. Eşit gerçelüstü sayılar birbirine sonsuzyakındır.

Teorem 9. *İki farklı gerçel sayı sonsuzyakın olamaz.*

Teorem 10. *Gerçel bir sayıya sonsuzyakın olan her gerçelüstü sayı sonludur.*

Şimdi Teorem 10'un tersini kanıtlayacağız.

Teorem 11. *Her sonlu gerçelüstü sayı, gerçel bir sayıya sonsuzyakındır.*

Kanıt. Sonlu bir $[\boldsymbol{a}]$ verilsin, ve $[\boldsymbol{a}] \geqslant 0$ olsun. (Diğer durumda $-[\boldsymbol{a}]$'ya bakarız.)

$$\{x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant [\boldsymbol{a}]\} = A$$

olsun. O zaman

$$\forall x\, \forall y\, (x < y \land y \in A \to x \in A).$$

Ayrıca $0 \in A$, ama (sonluluğun tanımından) A'nın üstsınırı vardır, dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin tamlığından A'nın supremumu vardır. O supremum b olsun. O zaman her n sayma sayısı için

$$b - \frac{1}{n} \in A, \qquad\qquad b + \frac{1}{n} \notin A,$$

dolayısıyla

$$b - \frac{1}{n} \leqslant [\boldsymbol{a}] < b + \frac{1}{n}.$$

Sonuç olarak $b \approx [\boldsymbol{a}]$. □

Kanıtta bulunan b, $[\boldsymbol{a}]$'nın **standart parçasıdır** (*standard part*).

Teorem 12. *Eğer $[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{c}]$, $[\boldsymbol{b}] \approx [\boldsymbol{d}]$, ve $[\boldsymbol{e}]$ sonlu ise, o zaman*

$$[\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{b}] \approx [\boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{d}], \qquad\qquad [\boldsymbol{a}][\boldsymbol{e}] \approx [\boldsymbol{c}][\boldsymbol{e}].$$

Teorem 13. *Eğer $[\boldsymbol{a}] \approx [\boldsymbol{c}]$ ve $[\boldsymbol{a}]$ sonsuzküçük değilse, o zaman*

$$[\boldsymbol{a}]^{-1} \approx [\boldsymbol{c}]^{-1}.$$

4 Süreklilik

4.1 Kümeler ve çeşitleri

${}^*\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$'nin *büyütmesidir.* Daha genelde, eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ ise, o zaman ${}^*\mathbb{R}$'nin (sayfa 14'teki) tanım (4)'ünde $\mathbb{R}$'nin yerine koyarak A'nın ${}^*A$ **büyütlemesini** elde ederiz. Böylece

$$\{[\boldsymbol{x}] \colon \boldsymbol{x} \in A^{\mathbb{N}}\} = {}^*A.$$

Teorem 14. *Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ ise, o zaman*

$${}^*A \cup {}^*B = {}^*(A \cup B), \qquad {}^*A \smallsetminus {}^*B = {}^*(A \smallsetminus B).$$

Elemanları gerçel sayı olan bir kümenin büyütlemesinin her sonsuzyakın olan gerçelüstü sayıyı içerdiği gerçel bir sayı, kümenin **iç noktasıdır.** Böylece bir a gerçel sayısının $\mathbb{R}$'nin bir A altkümesinin iç noktası olmak için

$$\forall[\boldsymbol{x}]\ \big([\boldsymbol{x}] \approx a \to [\boldsymbol{x}] \in {}^*A\big),$$

gerek ve yeter bir koşuldur.

Teorem 15. *Eğer pozitif bir δ için*

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq A$$

ise, o zaman a, A'nın bir iç noktasıdır.

Kanıt. Eğer $[\boldsymbol{x}] \approx a$ ise, o zaman $[\boldsymbol{x}] \in {}^*(a - \delta, a + \delta)$, dolayısıyla $[\boldsymbol{x}] \in {}^*A$. $\square$

Teorem 15'in tersi, sayfa 36'daki Teorem 41'dir.

Elemanları gerçel sayı olan, her elemanı bir iç noktası olan bir küme **açıktır.** Böylece bir O kümesinin açık olması için

$$\forall x\, \forall[\boldsymbol{y}]\, \big(x \in O \land x \approx [\boldsymbol{y}] \to [\boldsymbol{y}] \in {}^*O\big),$$

gerek ve yeter bir koşuldur.

Teorem 16.

1. *Her açık aralık, açık bir kümedir.*

2. *Açık kümelerin birleşimi de açıktır.*

3. *İki açık kümelerin kesişimi de açıktır.*

Açık bir kümenin tümleyeni **kapalıdır.** Teorem 14 sayesinde bir F kümesinin kapalı olması için

$$\forall[\boldsymbol{x}]\, \forall y\, \big([\boldsymbol{x}] \in {}^*F \land [\boldsymbol{x}] \approx y \to y \in F\big),$$

gerek ve yeter bir koşuldur.

Teorem 17.

1. *Her kapalı aralık, kapalı bir kümedir.*

2. *Kapalı kümelerin kesişimi de kapalıdır.*

3. *İki kapalı kümelerin birleşimi de kapalıdır.*

Teorem 18. *$\mathbb{R}$'nin bir A altkümesinin sınırlı olması için ${}^*A$'nın her elemanının sonlu olması, gerek ve yeter bir koşuldur.*

Teorem 19. *$\mathbb{R}$'nin bir K altkümesinin sınırlı ve kapalı olması için*
$$\forall[\boldsymbol{x}]\ \exists y\ \big([\boldsymbol{x}] \in {}^*K \to [\boldsymbol{x}] \approx y \land y \in K\big),$$
gerek ve yeter bir koşuldur.

Teorem 20. *$\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı olan bir altkümesinin en büyük ve en küçük elemanı vardır.*

Kanıt. K, $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı olan bir altkümesi olsun.

- K sınırlı olduğundan b supremumu vardır. Her n sayma sayısı için, K'nin bir a_n elemanı için,
$$b - \frac{1}{n} < a_n \leqslant b.$$
O halde $[\boldsymbol{a}] \in {}^*K$ ve $[\boldsymbol{a}] \approx b$.

- K kapalı olduğundan $b \in K$. □

4.2 Doğalüstü sayılar

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$'nin altkümesi olduğundan $\mathbb{N}$'nin
$${}^*\mathbb{N}$$
büyütlemesi vardır. O zaman $\mathbb{N}$ gibi ${}^*\mathbb{N}$, tümevarımlıdır.

Örnek 5. $[k\colon k \in \mathbb{N}] \in {}^*\mathbb{N} \smallsetminus \mathbb{N}$.

Bununla birlikte ${}^*\mathbb{N}$'de tümevarım bir şekilde kullanılabilir:

Teorem 21. *Eğer $\mathbb{N}$'nin bir A altkümesinin ${}^*A$ büyütlemesi tümevarımlı ise, o zaman ${}^*A = {}^*\mathbb{N}$, dolayısıyla $A = \mathbb{N}$.*

Kanıt. ${}^*A$ tümevarımlı olduğundan

1) $1 \in {}^*A$, dolayısıyla $1 \in A$;

2) eğer $n \in A$ ise, o zaman $n \in {}^*A$, dolayısıyla $n + 1 \in {}^*A$, dolayısıyla $n + 1 \in A$.

Tümevarımdan $A = \mathbb{N}$, dolayısıyla ${}^*A = {}^*\mathbb{N}$. □

Örnek 6. $\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{N}$'nin tümevarımlı bir altkümesidir, dolayısıyla $\mathbb{N}$'nin her A altkümesi için ${}^*A \neq \mathbb{N}$.

Teorem 22. ${}^*\mathbb{N} = \{1\} \cup \{[\boldsymbol{x}] + 1 \colon [\boldsymbol{x}] \in {}^*\mathbb{N}\}$.

Kanıt. Ya Teorem 21'i kullanabiliriz, ya da aşağıdaki hesaplamaları:

$$\begin{aligned}
&\{1\} \cup \{[\boldsymbol{x}] + 1 \colon [\boldsymbol{x}] \in {}^*\mathbb{N}\} \\
&= \{1\} \cup {}^*\{x + 1 \colon x \in \mathbb{N}\} && \text{[Teorem 23]} \\
&= {}^*(\{1\} \cup \{x + 1 \colon x \in \mathbb{N}\}) && \text{[Teorem 14]} \\
&= {}^*\mathbb{N} && \text{[Teorem 1].}
\end{aligned}$$
□

Doğal sayılar kümesi ω (*omega*) ile yazalım. O zaman

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$$

ve ayrıca

$${}^*\omega = \{0\} \cup {}^*\mathbb{N}.$$

Burada ${}^*\omega$'nın elemanlarına **doğalüstü sayı** densin. Her doğal sayı, doğalüstü olarak düşünülebilir.

4.3 Fonksiyonlar ve limitler

Bir kümeninki gibi bir fonksiyonun büyütlemesi vardır.

Teorem 23. *Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f\colon A \to \mathbb{R}$ ise, o zaman iyitanımlanmış bir ${}^*f$ için*

$$ {}^*f\colon {}^*A \to {}^*\mathbb{R}, $$

ve ${}^*A$'nın her $[\boldsymbol{x}]$ elemanı için

$$ {}^*f[\boldsymbol{x}] = [f(x_k)\colon k \in \mathbb{N}]. \tag{5} $$

Ayrıca

$$ {}^*\big(f[A]\big) = {}^*f[{}^*A]. \tag{6} $$

Kanıt. Verilen f fonksiyonu, elemanları $\big(a, f(a)\big)$ sıralı ikisi olan bir kümedir. O halde $f^{\mathbb{N}}$'nin elemanları, $\boldsymbol{a} \in A^{\mathbb{N}}$ olmak üzere

$$ \Big(\big(a_k, f(a_k)\big)\colon k \in \mathbb{N}\Big) $$

dizileridir. Tanım 3 gibi bir tanıma göre

$$ \Big(\big(a_k, f(a_k)\big)\colon k \in \mathbb{N}\Big) \mathrel{D} \Big(\big(b_k, f(b_k)\big)\colon k \in \mathbb{N}\Big) \leftrightarrow \\ \Big\{k \in \mathbb{N}\colon \big(a_k, f(a_k)\big) = \big(b_k, f(b_k)\big)\Big\} \text{ büyüktür} $$

olsun. O halde

$$ \Big\{k \in \mathbb{N}\colon \big(a_k, f(a_k)\big) = \big(b_k, f(b_k)\big)\Big\} = \\ \{k \in \mathbb{N}\colon a_k = b_k\} \cap \big\{k \in \mathbb{N}\colon f(a_k) = f(b_k)\big\} $$

olduğundan

$$ \Big(\big(a_k, f(a_k)\big)\colon k \in \mathbb{N}\Big) \mathrel{D} \Big(\big(b_k, f(b_k)\big)\colon k \in \mathbb{N}\Big) \leftrightarrow \\ [\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b}] \wedge \big[f(a_k)\colon k \in \mathbb{N}\big] = \big[f(b_k)\colon k \in \mathbb{N}\big]. $$

Böylece ${}^*f$, (5)'teki gibi olarak anlaşılabilir, ve bundan (6) çıkar. $\square$

Şimdi

$$A \subseteq \mathbb{R}, \qquad a \in A, \qquad f\colon A \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{R}, \qquad L \in \mathbb{R}$$

olsun. Eğer

$$\forall [\boldsymbol{x}] \ \big([\boldsymbol{x}] \in {}^*A \smallsetminus \{a\} \wedge [\boldsymbol{x}] \approx a \to {}^*f[\boldsymbol{x}] \approx L\big)$$

ise, o zaman L, f'nin a'daki **limitidir.** L limitini

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{veya} \qquad \lim_a f$$

ile yazarız. Limit tanımımızın "standart" tanıma denk olduğunu, Sayfa 38'de Teorem 42'de kanıtlayacağız.

Teorem 24. *$\lim_a f = L$ ve $\lim_a g = M$ ise*

$$\lim_a (f+g) = L + M \wedge \lim_a (fg) = LM.$$

Kanıt. Eğer $[\boldsymbol{x}] \approx a$ ve $[\boldsymbol{x}] \neq a$ ise, o zaman varsayıma göre

$$ {}^*f[\boldsymbol{x}] \approx L, \qquad\qquad {}^*g[\boldsymbol{x}] \approx M.$$

Özellikle Teorem 10 sayesinde ${}^*f[\boldsymbol{x}]$ sonludur. Şimdi Teorem 12 sayesinde

$$ {}^*f[\boldsymbol{x}] + {}^*g[\boldsymbol{x}] \approx L + M, \qquad {}^*f[\boldsymbol{x}]{}^*g[\boldsymbol{x}] \approx {}^*f[\boldsymbol{x}]M \approx LM. \quad \square$$

Teorem 25. *$\lim_a f = L$ ve $L \neq 0$ ise*

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{L}.$$

Kanıt. Teorem 13. $\square$

4.4 Süreklilik

- Tanım kümesi bir a noktasını içeren bir f fonksiyonu için, eğer
$$\lim_a f = f(a)$$
ise, o zaman f, **a'da süreklidir.** Böylece tanım kümesi A olan ve a'yı içeren bir f'nin a sürekli olması için
$$\forall[\boldsymbol{x}]\ \big([\boldsymbol{x}] \in {}^*A \wedge [\boldsymbol{x}] \approx a \to {}^*f[\boldsymbol{x}] \approx f(a)\big),$$
gerek ve yeter bir koşuldur.

- Tanım kümesi bir A kümesini kapsayan, A'nın her noktasında sürekli olan bir fonksiyon, **A'da süreklidir.**

- Kendinin tanım kümesinde sürekli olan bir fonksiyon, **süreklidir.**

Örnek 7. Her sabit fonksiyon süreklidir; özdeşlik fonksiyonu süreklidir. Sonuç olarak

- Teorem 24 sayesinde her polinom fonksiyonu süreklidir;

- Teorem 25 sayesinde her kesirli fonksiyonu süreklidir.

Örnek 8. Eğer kapalı olan, sınırlı olmayan $[0, \infty)$ aralığında $f(x) = x^2$ ise, f'nin sürekli olduğu halde
$$[k + k^{-1} \colon k \in \mathbb{N}] \approx [k \colon k \in \mathbb{N}],$$
$${}^*f[k + k^{-1} \colon k \in \mathbb{N}] = {}^*f[k \colon k \in \mathbb{N}] + 2.$$

Örnek 9. Eğer sınırlı olan, kapalı olmayan $(0, 1]$ aralığında $f(x) = x^{-1}$ ise, f'nin sürekli olduğu halde
$$[n^{-1} \colon n \in \mathbb{N}] \approx [(n+1)^{-1} \colon n \in \mathbb{N}],$$
$${}^*f[n^{-1} \colon n \in \mathbb{N}] + 1 = {}^*f[(n+1)^{-1} \colon n \in \mathbb{N}].$$

Teorem 26. *f'nin kapalı ve sınırlı bir A kümesinde sürekli olması için $^*A$'nın tüm sonlu $[\boldsymbol{x}]$ ve $[\boldsymbol{y}]$ elemanı için*

$$\forall\big([\boldsymbol{x}],[\boldsymbol{y}]\big)\ \big([\boldsymbol{x}] \in {}^*A \wedge [\boldsymbol{y}] \in {}^*A \wedge \\ [\boldsymbol{x}] \approx [\boldsymbol{y}] \to {}^*f[\boldsymbol{x}] \approx {}^*f[\boldsymbol{y}]\big),$$

gerek ve yeter bir koşuldur.

Teorem 27 (Aradeğer)**.** *Eğer f, $[a,b]$'de sürekli ve*

$$\big(f(a)-c\big)\big(c-f(b)\big) > 0$$

ise, o zaman bir d için

$$a < d < b \wedge f(d) = c. \tag{7}$$

Kanıt. $f(a) < c < f(b)$ varsayılabilir. İstediğimiz d gerçel sayısı bir $[d_n : n \in \mathbb{N}]$ gerçelüstü sayısının standart parçası olacak.

Her n sayma sayısı için

$$\delta_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

olsun. O zaman

$$\delta_1 = b-a, \qquad \delta_{m+1} = \frac{\delta_m}{2}.$$

Teorem 4'ü kullanarak

1) $a = d_1$,

2) $$\left.\begin{array}{ll} f(d_m+\delta_{m+1}) \leqslant c \text{ ise} & d_m+\delta_{m+1} \\ c < f(d_m+\delta_{m+1}) \text{ ise} & d_m \end{array}\right\} = d_{m+1}$$

olsun. Tümevarımdan her n sayma sayısı için

$$a \leqslant d_n < d_n + \delta_n \leqslant b, \qquad f(d_n) \leqslant c < f(d_n + \delta_n).$$

Sonuç olarak

$$^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}] \leqslant c < {}^*f[d_n + \delta_n \colon n \in \mathbb{N}],$$

ama $[\delta_n \colon n \in \mathbb{N}]$ sonsuzküçüktür. Teorem 26 sayesinde

$$^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}] \approx {}^*f[d_n + \delta_n \colon n \in \mathbb{N}].$$

Bundan dolayı

$$^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}] \approx c.$$

Şimdi d, $[d_n \colon n \in \mathbb{N}]$ gerçelüstü sayısının standart parçası olsun. O zaman

$$f(d) \approx {}^*f[d_n \colon n \in \mathbb{N}],$$

dolayısıyla (7) sağlanır. □

Örnek 10. $[1, \infty)$ aralığı kapalıdır ama sınırlı değildir; $(0, 1]$ aralığı kapalı değildir ama sınırlıdır. Sürekli $x \mapsto x^{-1}$ fonksiyonu altında verilen aralıkların her biri, diğerin imgesidir.

Teorem 28. *Sürekli bir fonksiyon altında kapalı ve sınırlı olan bir kümenin imgesi de kapalı ve sınırlıdır.*

Kanıt. Kapalı ve sınırlı olan K kümesinde f sürekli olsun, ve

$$[\boldsymbol{a}] \in {}^*(f[K])$$

olsun. Teorem 23 sayesinde

$$^*(f[K]) = {}^*f[{}^*K],$$

dolayısıyla bir $[\boldsymbol{b}]$ için

$$[\boldsymbol{b}] \in {}^*K, \qquad\qquad {}^*f[\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}].$$

Bu durumda Teorem 19 sayesinde bir b için

$$b \in K, \qquad\qquad [\boldsymbol{b}] \approx b.$$

K'de f sürekli olduğundan

$$[\boldsymbol{a}] \approx f(b).$$

Tekrar Teorem 19 sayesinde ${}^*(f[K])$ kapalı ve sınırlıdır. $\square$

Teorem 29 (Maksimum-minimum)**.** *Kapalı ve sınırlı bir kümede sürekli bir fonksiyon en büyük bir değeri ve en küçük bir değeri alır.*

Kanıt. Teoremler 20 ve 28. $\square$

5 Hesaplama

5.1 Türevler

Eğer

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

varsa,

$$f'(a)$$

olsun. Bu şekilde tanımlanan f' fonksiyonu, f'nin **türevidir.** Eğer $[\boldsymbol{h}]$ sonsuzküçük ama 0 değilse, o zaman $f'(a)$,

$$\frac{{}^{*}f(a+[\boldsymbol{h}])-f(a)}{[\boldsymbol{h}]}$$

bölümünün standart parçasıdır. Bu standart parça

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x}(a)$$

olarak da yazılabilir.

Teorem 30. $\mathrm{d}\, 1/\,\mathrm{d}\, x = 0$ *ve* $\mathrm{d}\, x/\,\mathrm{d}\, x = 1$.

Teorem 31. $(f+g)' = f' + g'$.

Teorem 32. $(fg)' = f'g + fg'$.

Kanıt. Teorem 24'ü kullanarak

$$\frac{f(a)g(a)-f(x)g(x)}{a-x} = f(a)\frac{g(a)-g(x)}{a-x} + \frac{f(a)-f(x)}{a-x}g(x)$$

eşitliğinden istediğimiz sonucu elde ederiz. □

Örnek 11. Teoremler 30, 31, ve 32 sayesinde

$$\frac{\mathrm{d}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)}{\mathrm{d}\,x}(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}.$$

Teorem 33. *Eğer f'nin türevi varsa, o zaman f süreklidir.*

Teorem 34 (Rolle)**.** *Eğer*

- *$[a, b]$ aralığında f sürekli,*
- *(a, b) aralığında f'nin türevlenebilir,*
- *$f(a) = f(b)$*

ise, o zaman (a, b) aralığının bir c elemanı için

$$0 = f'(c).$$

Kanıt. Teorem 29'a göre $[a, b]$'de f, en küçük değerini bir c noktasında ve en büyük değerini bir d noktasında alır. Bu noktaların biri ne a ne b'dir; c olsun. O halde $x \in [a, c)$ ise

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$

dolayısıyla $f'(c) \leqslant 0$. Aynı zamanda $x \in (c, b]$ ise

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0,$$

dolayısıyla $f'(c) \geqslant 0$. □

Teorem 35 (Ortadeğer)**.** *Eğer bir $[a, b]$ aralığında f'nin türevi varsa, o zaman aralığın bir c elemanı için*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Kanıt. Tanımlayan denklemi

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

olan g fonksiyonu ile Teorem 34'ü kullanın. □

Teorem 36. *Bir aralıkta eğer $f' = g'$ ve $f(a) = g(a)$ ise, o zaman $f = g$.*

Kanıt. Eğer $f(b) \neq g(b)$ ise, o zaman Teorem 35 sayesinde $[a, b]$ veya $[b, a]$ aralığının bir noktasında $f - g$ fonksiyonunun $f' - g'$ türevi sıfır değildir. □

5.2 Integraller

Tanım kümesi bir $[a, b]$ kapalı sınırlı aralığını kapsayan bir f fonksiyonu için, eğer bir n sayma sayısı için bazı x_i gerçel sayıları

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

koşulunu sağlarsa, o zaman $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi, $[a, b]$'nin bir **parçalamasıdır.** Eğer ayrıca bazı t_i için

$$x_{i-1} \leqslant t_i \leqslant x_i \tag{8}$$

ise, o zaman

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

toplamı, $[a, b]$ aralığında f'nin bir **Riemann toplamıdır.**

Şimdi $i \mapsto x_i$ veya x, tanım kümesi ω olan, artan bir fonksiyon olsun, ve bir n sayma sayısı için

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = x_{n+1} = \ldots = b$$

olsun. O zaman yukarıdaki gibi $\{x_i \colon i \in \omega\}$, $[a, b]$'nin bir parçalamasısıdır. Eğer ayrıca $i \mapsto t_i$ veya t, tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan bir fonksiyon ise, ve her i sayma sayısı için eşitsizlik (8) doğru ise, o zaman yukarıdaki Riemann toplamı

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi her k doğal sayısı için x_k ve t_k, yukarıdaki gibi x ve t fonksiyonu olsun. O zaman girdileri Riemann toplamı olan bir

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f(t_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1}) \colon k \in \mathbb{N}\right)$$

dizisi vardır. Ayrıca $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'nin bir $\boldsymbol{n}$ elemanı için, her k sayma sayısı için,

$$x_{k,n_k} = x_{k,n_k+1} = \ldots = b.$$

Bu durumda yukarıdaki, girdileri Riemann toplamı olan dizi

$$\left(\sum_{i=1}^{n_k} f(t_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1}) \colon k \in \mathbb{N}\right)$$

olur.

Şimdi $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$'nin her $\boldsymbol{i}$ elemanı için

$$\boldsymbol{t_i} = (t_{k,i_k} \colon k \in \mathbb{N}), \qquad \boldsymbol{x_i} = (x_{k,i_k} \colon k \in \mathbb{N}),$$

ve

$$\boldsymbol{x_{i-1}} = (x_{k,i_k-1} \colon k \in \mathbb{N})$$

olsun. Bu durumda

$$[\boldsymbol{x_{i-1}}] \leqslant [\boldsymbol{t_i}] \leqslant [\boldsymbol{x_i}]$$

ve

$$[\boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{j}] \to [\boldsymbol{t_i}] = [\boldsymbol{t_j}] \wedge [\boldsymbol{x_i}] = [\boldsymbol{x_j}] \wedge [\boldsymbol{x_{i-1}}] = [\boldsymbol{x_{j-1}}].$$

Eğer ayrıca

$$T = \Big\{[\boldsymbol{t_i}] \colon [\boldsymbol{i}] \in {}^*\mathbb{N}\Big\} = \Big\{[\boldsymbol{t}_1], [\boldsymbol{t}_2], \dots, [\boldsymbol{t_n}]\Big\}$$

ise, ve benzer şekilde

$$X = \Big\{[\boldsymbol{x}_0], [\boldsymbol{x}_1], \dots, [\boldsymbol{x_n}]\Big\}$$

ise, o zaman

$$\left[\sum_{i=1}^{n_k} f(t_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1}) \colon k \in \mathbb{N}\right]$$

gerçelüstü sayısı

$$\sum_{[\boldsymbol{i}]=1}^{[\boldsymbol{n}]} {}^*f[\boldsymbol{t_i}]([\boldsymbol{x_i}] - [\boldsymbol{x_{i-1}}]) \text{ veya } \mathrm{RT}(f, T, X)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer her durumda

$$[\boldsymbol{x_i}] \approx [\boldsymbol{x_{i-1}}]$$

ise, o zaman

- X, $[a, b]$'nin **sonsuz bir parçalamasıdır;**
- $\mathrm{RT}(f, T, X)$, $[a, b]$'de f'nin **sonsuz bir Riemann toplamıdır.**

Eğer $[a, b]$'de f'nin her sonsuz Riemann toplamı aynı I gerçel sayısına sonsuzyakın ise, o zaman I, $[a, b]$'de f'nin **integralidir,** ve

$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

yazılır.

Teorem 37. *Eğer bir fonksiyon kapalı sınırlı bir aralıkta sürekli ise, o zaman o aralıkta fonksiyonun integrali vardır.*

Kanıt. Bir $\mathrm{RT}(f, T, X)$ sonsuz Riemann toplamı verilsin. Teorem 29 sayesında her $[x_{k,i-1}, x_{k,i}]$ aralığında f'nin en küçük değeri bir $c_{k,i}$ noktasında ve en büyuk değeri bir $d_{k,i}$ noktasında alınır. Bu durumda

$$\mathrm{RT}(f, C, X) = \mathrm{RT}_*(f, X), \qquad \mathrm{RT}(f, D, X) = \mathrm{RT}^*(f, X)$$

olsun. O zaman

$$\mathrm{RT}_*(f, X) \leqslant \mathrm{RT}(f, T, X) \leqslant \mathrm{RT}^*(f, X).$$

Ayrıca her k için, bir j_k için,

$$\operatorname*{maks}_{1 \leqslant i \leqslant n_k} (f(d_{k,i}) - f(c_{k,i})) = f(d_{k,j_k}) - f(c_{k,j_k}),$$

dolayısıyla

$$\mathrm{RT}^*(f, X) - \mathrm{RT}_*(f, X) \leqslant ({}^*f[\boldsymbol{d_j}] - {}^*f[\boldsymbol{c_j}])(b - a).$$

Ayrıca $[\boldsymbol{d_j}]$ ve $[\boldsymbol{c_j}]$ sonsuzyakındır, çünkü $[\boldsymbol{x_{j-1}}]$ ve $[\boldsymbol{x_j}]$'nin arasındadır. Bundan dolayı Teorem 26'dan

$${}^*f[\boldsymbol{d_j}] \approx {}^*f[\boldsymbol{c_j}],$$

ve sonuç olarak

$$\mathrm{RT}_*(f, X) \approx \mathrm{RT}(f, T, X) \approx \mathrm{RT}^*(f, X).$$

Eğer farklı bir Y sonsuz parçalaması verilirse, o zaman

$$\mathrm{RT}_*(f, X) \leqslant \mathrm{RT}_*(f, X \cup Y) \leqslant \mathrm{RT}^*(f, X \cup Y) \leqslant \mathrm{RT}^*(f, X),$$

dolayısıyla

$$\mathrm{RT}_*(f, X) \approx \mathrm{RT}_*(f, X \cup Y) \approx \mathrm{RT}_*(f, Y).$$

Sonuç olarak $[a, b]$ aralığında f'nin bütün sonsuz Riemann toplamı sonsuzyakındır. □

Tanıma göre

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

olsun.

Teorem 38.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorem 39. *Eğer f sürekli ise, o zaman*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \int_a^x f = f.$$

Kanıt. $F(x) = \int_a^x f$ olsun, ve $[\boldsymbol{h}]$, sıfır olmasın ama sonsuzküçük olsun. Eğer $h_k \neq 0$ ise, o zaman f sürekli olduğundan $[x, x + h_k]$ veya $[x + h_k, x]$ aralığında, f en küçük değerini bir c_k noktasında, ve en büyük değerini bir d_k noktasinda, alır. O zaman

$$f(c_k) \leqslant \frac{F(x + h_k) - F(x)}{h_k} \leqslant f(d_k),$$

dolayısıyla

$$^*f[\boldsymbol{c}] \leqslant \frac{^*F(x+[\boldsymbol{h}]) - F(x)}{[\boldsymbol{h}]} \leqslant {}^*f[\boldsymbol{d}].$$

İstediğimiz sonuç çıkar çünkü $[\boldsymbol{c}] \approx x \approx [\boldsymbol{d}]$. □

Teorem 40. *Eğer $F' = f$ ise, o zaman*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Kanıt. Eğer $G(x) = \int_a^x f + F(a)$ ise, o zaman Teorem 39 sayesinde $G' = F'$. Ayrıca $G(a) = F(a)$, dolayısıyla Teorem 36 göre $G = F$. □

6 Ek

6.1 Açık kümeler

Sayfa 18'deki Teorem 15 ve aşağıdaki Teorem 41 sayesinde $\mathbb{R}$'nin açık altkümeleri, bazı açık aralıkların birleşimidir.

Teorem 41. *Bir a gerçel sayısının, $\mathbb{R}$'nin bir A altkümesinin bir iç noktası ise, o zaman pozitif bir δ gerçel sayısı için*

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq A.$$

Kanıt. Her k sayma sayısı için $(a-k^{-1}, a+k^{-1})$ aralığı, A'nın elemanı olmayan bir x_k gerçel sayısını içersin. O halde $[\boldsymbol{x}] \approx a$, ama $[\boldsymbol{x}] \notin A$. Böylece a, A'nın bir iç noktası değildir. □

6.2 Cebir

Cebir açısından $\mathbb{N}$'nin altkümeleri, bir $\wp(\mathbb{N})$ halkasını oluşturur. Halkanın iki X ve Y elemanının

- $X+Y$ toplamı, $(X \smallsetminus Y) \cup (Y \smallsetminus X)$ *simetrik farkı* olur;
- XY çarpımı, $X \cap Y$ kesişimi olur.

$XX = X$ olduğundan $\wp(\mathbb{N})$ bir **Boole halkasıdır.** $\mathbb{N}$'nin küçük altkümeleri, bu halkanın *asal bir ideali* (*prime ideal*) oluşturur. Zorn Lemması'ndan her halkanın asal bir ideali var olduğu kanıtlanabilir. Aslında kümeler kuramının Zermelo–Fraenkel Aksiyomları altında Zorn Lemması ve Seçim Aksiyomu denktir ama sadece Asal İdeal Teoremi'nden kanıtlanamaz [2].

$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon \boldsymbol{x}\ D\ 0\}$ kümesi, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının asıl olmayan (*non-principal*) asal bir P idealidir, ve bu şekilde

$$^*\mathbb{R} = \mathbb{R}/P.$$

Eğer tam tersine P, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının asıl olmayan asal bir ideali ise, o zaman $\mathbb{N}$'nin büyük altkümelerini, $\boldsymbol{a} \in P$ olmak üzere

$$\{k \in \mathbb{N} \colon a_k = 0\}$$

kümeleri olarak tanımlayabiliriz.

$^*\mathbb{R}$ cisminin sonlu elemanları, bir $\mathfrak{O}$ halkasını oluşturur. Bu halka bir **değerlendirme halkasıdır** (*valuation ring*) çünkü halkanın tek maksimal $\mathfrak{M}$ ideali vardır. Aslında

$$\mathfrak{M} = \{[\boldsymbol{x}] \colon [\boldsymbol{x}] \approx 0\},$$

$^*\mathbb{R}$'nin sonsuzküçük elemanlarının oluşturduğu kümedir. O zaman

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{M} \cong \mathbb{R}.$$

Aslında tanım kümesi $\mathbb{R}$ olan

$$x \mapsto [x, x, x, \dots] + \mathfrak{M}$$

göndermesi, $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ üstüne bir φ izomorfizmasıdır, ve $[\boldsymbol{a}]$ sonlu ise $\varphi^{-1}([\boldsymbol{a}] + \mathfrak{M})$, $[\boldsymbol{a}]$'nın standart parçasıdır.

6.3 Gerçel sayıların inşası

Şimdi P, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ halkasının asıl olmayan asal bir ideali olsun. O zaman P, maksimal bir idealdir. Olsun

$$^*\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/P.$$

Yukarıdaki gibi $^*\mathbb{Q}$'nün sonlu elemanları, maksimal ideali $\mathfrak{M}$ olan bir $\mathfrak{O}$ değerlendirme halkasını oluşturur. Tekrar $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ bölümü, tam doğrusal sıralanmış bir cisim olur. Bundan dolayı $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}$ olarak $\mathbb{R}$'yi tanımlayabiliriz.

6.4 Epsilon-delta tanımı

Teorem 42. *f'nin a'daki limitinin L olması için gerek ve yeter bir koşul, $\mathbb{R}$'de her pozitif ε için, bir pozitif δ için, her x için*

$$0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kanıt. İlk olarak verilen koşulun doğru olduğunu varsayalım. Bir $\boldsymbol{x}$ *dizisi* için $[\boldsymbol{x}] \approx a$ ama $[\boldsymbol{x}] \neq a$ olsun. O halde $^*f[\boldsymbol{x}] \approx L$ göstereceğiz. Şimdi ε, pozitif gerçel bir sayı olsun; $\{k \in \mathbb{N} \colon |f(x_k) - L| < \varepsilon\}$ kümesinin büyük olduğunu göstermek yeter. Varsayıma göre pozitif gerçel bir δ için o küme $\{k \in \mathbb{N} \colon 0 < |x_k - a| < \delta\}$ kümesini kapsar; ayrıca bu küme büyüktür.

Tam tersine ε, pozitif gerçel bir sayı olsun. Mümkünse her pozitif gerçel δ için, gerçel bir x için,

$$0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geqslant \varepsilon$$

olsun. O zaman bir $\boldsymbol{x}$ *dizisi* için her k sayma sayısı için

$$0 < |x_k - a| < \frac{1}{k} \wedge |f(x_k) - L| \geqslant \varepsilon.$$

Bu durumda $[\boldsymbol{x}] \approx a$ ve $[\boldsymbol{x}] \neq a$, ama $^*f[\boldsymbol{x}] \not\approx L$. □

Kaynakça

[1] René Descartes. *La Géométrie*. Jacques Gabay, Sceaux, France, 1991. Reprint of Hermann edition of 1886.

[2] J. D. Halpern and A. Lévy. The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In *Axiomatic Set Theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967)*, pages 83–134. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[3] James M. Henle and Eugene M. Kleinberg. *Infinitesimal calculus*. Dover Publications, Mineola, NY, 2003. Reprint of the 1979 original [MIT Press, Cambridge, MA].

[4] David Hilbert. *Foundations of Geometry*. Open Court, La Salle, Illinois, 1971. Second English edition, translated by Leo Unger from the Tenth German edition, revised and enlarged by Paul Bernays.

[5] H. Jerome Keisler. *Foundations of Infinitesimal Calculus*. 2011. `www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html`, accessed February 15, 2020. First edition published 1976 by Prindle, Weber & Schmidt.

[6] H. Jerome Keisler. *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*. 2019. `www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html`, accessed February 15, 2020. First edition published 1976; second, 1986; by Prindle, Weber & Schmidt.

[7] Abraham Robinson. *Non-standard Analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. Reprint of the second (1974) edition. With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg. First edition 1965.

[8] Michael Spivak. *Calculus.* Publish or Perish, Berkeley, California, 2nd edition, 1980.