Koni kesitleri

David Pierce

25 Aralık 2012
Genişletilmiş, gözden geçirilmiş
22 Kasım 2018
Popüler Matematik

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
dpierce@msgsu.edu.tr
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

Şekil Listesi

1 Parabol, hiperbol, ve elips

Bir **koni kesiti,** bir koni yüzeyi ile bir düzlemin kesişimidir. Milattan önce 3. yüzyılda Pergeli Apollonius, koni kesitlerine **parabol, hiperbol,** ve **elips** (παραβολή, ὑπερβολή, ve ἔλλειψις) adlarını verdi. Bu adları anlamak, amacımızdır.

Bir parabolün noktaları, bir **odaktan** (focus) ve bir **doğrultmandan** (directrix) aynı uzaklıktadır. Örneğin dik eskenlerde eğer Şekil 1'deki gibi bir parabolün

- odağı $(c, 0)$ ve
- doğrultmanının denklemi $x + c = 0$

ise, o zaman parabolün noktaları, aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned} x + c &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ (x+c)^2 &= (x-c)^2 + y^2, \end{aligned}$$

ve sonunda

$$4cx = y^2.$$

Diğer koni kesitlerinin her birinin iki odağı vardır.

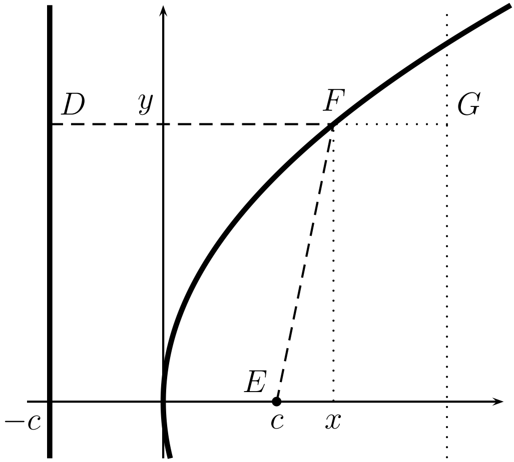
- Elipste odaklardan uzaklıkların toplamı sabittir.
- Hiperbolde odaklardan uzaklıkların farkı sabittir.

Şekiller 2 ve 3'teki gibi yukarıdaki

- toplam veya fark $2a$, ve
- odaklar $(-c, 0)$ ve $(c, 0)$,

olsun. Eğrinin bir denklemi

$$2a \mp \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$



Şekil 1: Parabol ($DF = EF$, $EF + FG$ sabittir)

ve kareler alındığında

$$\begin{gathered}
4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx, \\
a^2 - cx = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \\
a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2.
\end{gathered}$$

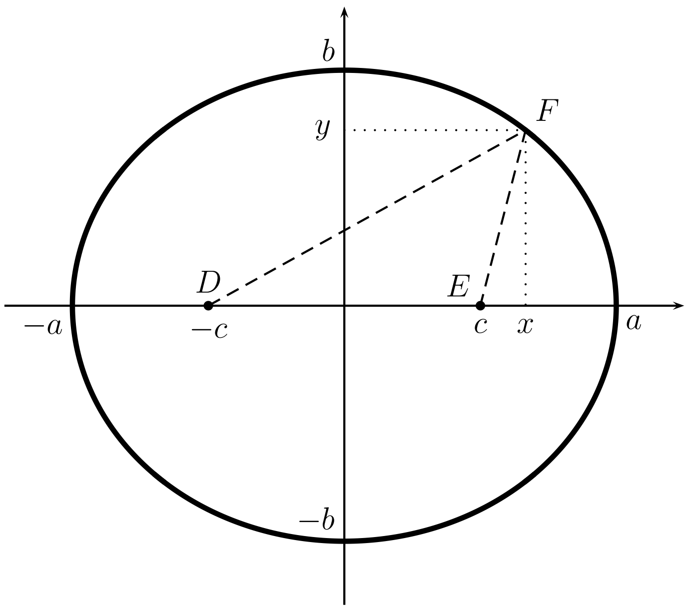
Eğer

$$a^2 - c^2 = \pm b^2$$

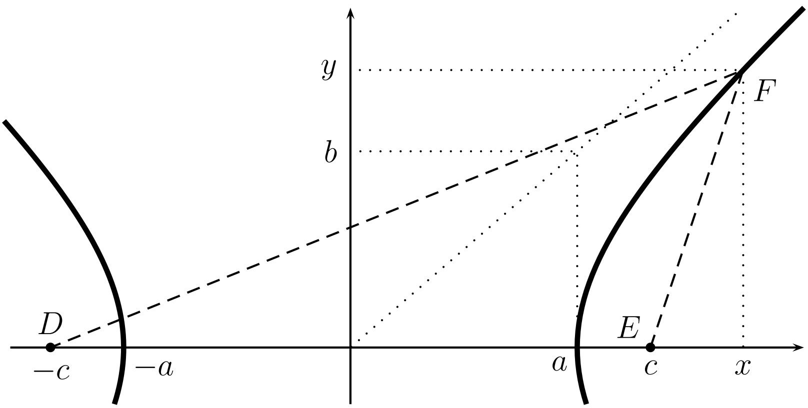
ise, o zaman

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.1}$$

Gördümüz özellikleri uyarak bir ip ile koni kesitlerinin her birini çizebiliriz; ama bu özellikler, kesitlerin adlarını anlatmaz.



Şekil 2: Elips ($DF + EF = 2a$, $DE = 2c$, $a^2 = b^2 + c^2$)



Şekil 3: Hiperbol ($DF - EF = 2a$, $DE = 2c$, $a^2 + b^2 = c^2$)

2 Kelimeler

Parabol, hiperbol, ve elips adlarının normal anlamları vardır.

βάλλω (*fiil*) atmak, fırlatmak.

βολή (*isim*) atma, fırlatma.

παραβάλλω (*fiil*) karşılaştırmak, yaklaşmak.

παραβολή (*isim*) karşılaştırma, yaklaşma, ilişki, benzeme.

ὑπερβάλλω (*fiil*) geçmek, aşmak.

ὑπερβολή (*isim*) geçme, aşma, fazlalık.

λείπω (*fiil*) bırakmak, eksik olmak.

λε ιψις (*isim*) eksiklik.

ἐλλείπω (*fiil*) bir yana bırakmak, arkada bırakmak.

ἔλλειψις (*isim*) eksiklik.

Son kelime, Çelgin'in [3] sözlüğünde değildir.

3 Oranlar, orantılar, ve benzerlik

Koni kesitlerini anlatmak için Apollonius

- denklemleri değil,
- *orantıları* kullanır.

Bir orantı,

- iki *oranın* bir aynılığıdır,
- dört **büyüklüğün** bir bağıntısıdır.

Sınırlı doğrular, alanlar, ve cisimler, büyüklük örnekleridir. Bir büyüklük **çoğaltılabilir.** Böylece her n sayma sayısı için, bir A büyüklüğünün

$$nA$$

n katı vardır. B, bir büyüklük daha olsun. Eğer bir n sayısı için

$$nA > B, \qquad nB > A$$

ise, o zaman büyüklüklerin **oranı vardır.** (Bu tanım, Öklid'in *Öğeler*'inin V. kitabının 4. tanımıdır.) A'nın B'ye oranı için

$$A/B, \qquad A : B$$

ifadeleri yazılabilir.

A ve B'nin oranı olsun; C ve D'nin oranı olsun. Tüm n ve m sayma sayıları, aşağıdaki denklikleri sağlasın.

$$\begin{aligned} nA > mB &\iff nC > mD, \\ nA = mB &\iff nC = mD, \\ nA < mB &\iff nC < mD. \end{aligned}$$

O zaman

- A'nın B'ye **oranı,** C'nin D'ye **oranı ile aynıdır,** ve
- A, B, C, ve D büyüklükleri, **orantılıdır**

[*Öğeler* V, 5. tanım]. Bu durumda

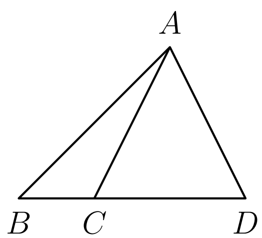
$$A : B :: C : D, \qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

ifadeleri yazılabilir. *Öğeler*'de bir orantı, iki oranın *eşitliği* değil, *aynılığıdır.* Bir oran, sıralı bir büyüklük ikilisinin bir denklik sınıfıdır. (Benzer bir şekilde pozitif bir kesir, sıralı bir sayma sayısı ikilisinin bir denklik sınıfıdır.)

Öğeler'in V. kitabında kolay kurallar gösterilir, mesela

$$A : B :: C : D \implies \begin{cases} A + B : B :: C + D : D, \\ B : A :: D : C. \end{cases}$$

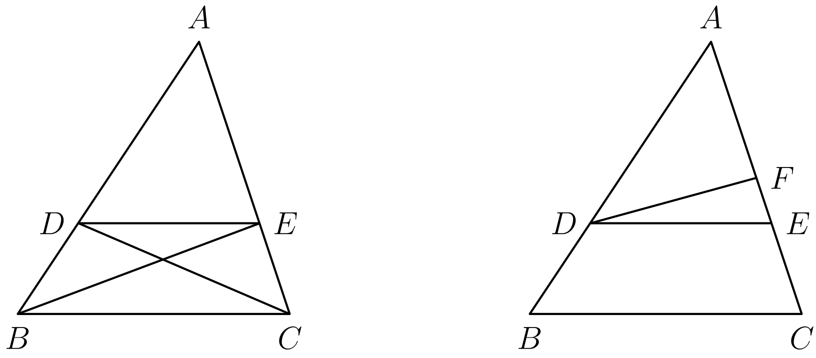
Teorem 1 (*Öğeler* VI.1)**.** *Yüksekliğinin aynı olan üçgenlerin oranı, tabanlarının oranıyla aynıdır.*



Şekil 4: Yüksekliğinin aynı olan üçgenler

Kanıt. Orantının tanımından Şekil 4'te

$$ABC : ACD :: BC : CD. \qquad \square$$



Şekil 5: Tales Teoremi

Teorem 2 (Tales Theoremi, *Öğeler* VI.2)**.** *Bir üçgende bir doğru iki kenarı orantılı bir şekilde keser, ancak ve ancak bu doğru, tabana paraleldir.*

Kanıt. Şekil 5'te eğer $DE \parallel BC$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} AD : DB &:: ADE : DBE && \text{[Teorem 1]} \\ &:: ADE : DCE && \text{[\textit{Öğeler} I.37]} \\ &:: AE : EC. && \text{[Teorem 1]} \end{aligned}$$

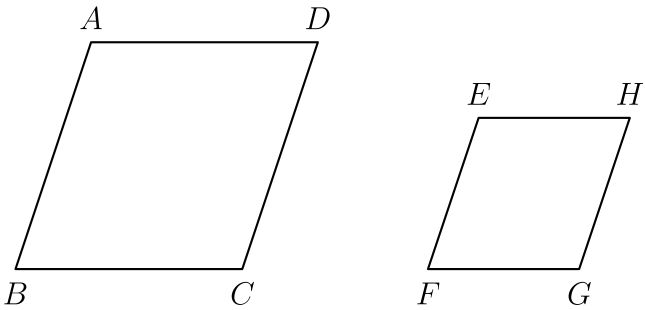
Ters de doğrudur, çünkü $DF \nparallel BC$ ise, o zaman $AF : FC$ ve $AE : EC$ oranları birbirinden farklıdır. □

Eğer iki çokgenin

- açıları (her biri birine) eşit ve
- kenarları orantılı

ise, o zaman çokgenler birbirine **benzerdir** [*Öğeler* VI, 1. tanım]. Örneğin

- Şekil 5'te ABC ve ADE üçgenleri birbirine benzerdir.



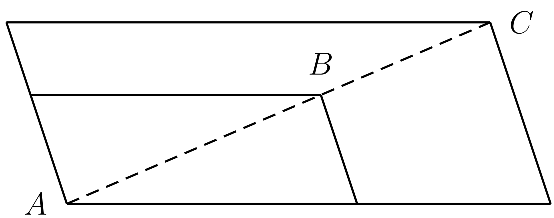
Şekil 6: Benzer paralelkenar

- Şekil 6'da eğer

$$ABC = EFG, \qquad AB : BC :: EF : FG$$

ise, o zaman $ABCD$ ve $EFGH$ paralelkenarları da birbirine benzerdir.

Teorem 3 (*Öğeler* VI.24, 26)**.** *Aynı açıda olan paralelkenarlar benzerdir ve benzer oturur, ancak ve ancak köşegenleri, aynı doğrudadır.*



Şekil 7: Aynı açıda olan paralelkenarlar

Örneğin Şekil 7'de, AB ile AC paralelkenarları birbirine benzerdir ve benzer oturur, ancak ve ancak A, B, ve C noktaları bir doğrudadır.

4 Çemberler

Teorem 4 (*Öğeler* III.1)**.** *Bir çemberin bir kirişinin orta dikmesi, çemberin merkezinden geçer.*

Teorem 5 (*Öğeler* III.35)**.** *Bir çemberin iki kirişi kesişirse, birinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgen, ötekinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.*

Kanıt. Diyoruz ki Şekil 8'de

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED. \tag{4.1}$$

Zira kirişlerin birinin çemberin merkezinden geçtiğini varsayabiliriz. Bu kiriş CD olsun. Şekil 8'de Pisagor Teoremi [*Öğeler* I.47] ile

$$\begin{aligned} (r+a)(r-a) &= r^2 - a^2 \\ &= b^2 + d^2 - (d^2 + c^2) \\ &= b^2 - c^2 \\ &= (b+c)(b-c), \end{aligned}$$

yani istediğimiz (4.1) denklemi sağlanır. □

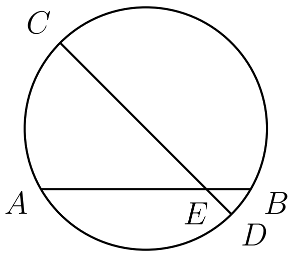
Özel bir durum vardır.

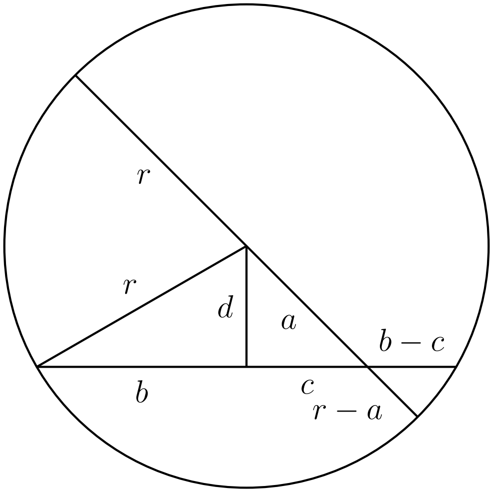
Teorem 6. *Yarım dairenin çapına bir dikmede olan kare, çapın parçaları tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.*

Örneğin Şekil 9'da

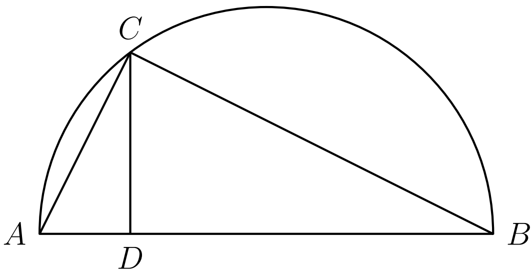
$$CD^2 = AD \cdot DB.$$

(Sonuç olarak ACB açısı dik olmalı.)





Şekil 8: Çemberin iki kesişen kirişleri



Şekil 9: Yarıçember

5 Uygulamalar

Öklid'de *παραβάλλω* fiili, *yerleştirmek* veya *uygulamak* (apply) olarak çevrilebilir. Fiil birkaç tane *problemlerde* kullanılır:

Problem 1 (*Öğeler* I.44)**.**

Παρὰ τὴν δοθε ισαν εὐθε ιαν
τ ῳ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον παραβαλε ιν
ἐν τ ῃ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Verilen bir doğru boyunca
verilen bir üçgene eşit
bir paralelkenar uygulamak
verilen bir açıda.

Problem 2 (*Öğeler* I.45)**.**

Τ ῳ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον συστήσασθαι
ἐν τ ῃ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Verilen bir çokgene eşit
bir paralelkenar inşa etmek
verilen bir açıda.

Sonuç olarak aşağıdaki problemi çözebiliriz:

Problem 3.

Verilen bir doğru boyunca
verilen bir çokgene eşit
bir paralelkenar uygulamak
verilen bir açıda.

Öğeler'in VI. kitabında Öklid, Problem 3'ün son satırında iki değişikliği yapar:

Problem 4 (*Öğeler* VI.28)**.**

Παρὰ τὴν δοθε ισαν εὐθε ιαν
τ ῳ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον <u>παραβαλε ιν</u>
<u>ἐλλε ιπον</u> εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τ ῳ δοθέντι.

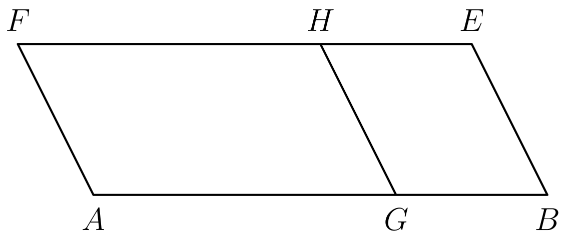
Verilen bir doğru boyunca
verilen bir çokgene eşit
bir paralelkenar <u>uygulamak</u>
verilen bir paralelkenara benzer kadar <u>eksik kalan</u>.

Örneğin

- verilen doğru AB,
- verilen çokgen C, ve
- verilen paralelkenar D

ise, o zaman Şekil 10'daki gibi tabanı AB olan bir AE paralelkenarının

- AH parçası C çokgenine eşittir;
- GE parçası D paralelkenarına benzerdir.



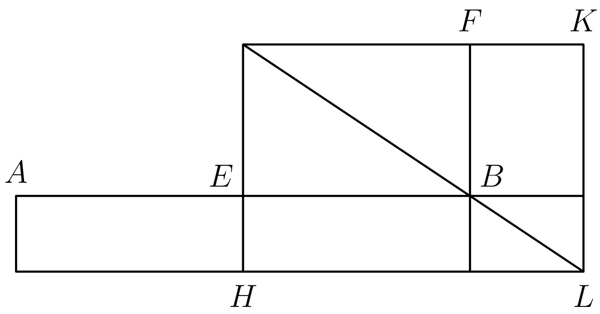
Şekil 10: Eksikliği olan bir paralelkenarın uygulaması

Öklid'in verdiği bir şartı yazmadım: C, tabanı AB'nin yarısı olan ve D'ye benzer olan paralelkenardan daha büyük olamaz.

Problem 5 (*Öğeler* VI.29).

Παρὰ τὴν δοθε ισαν εὐθε ιαν
τ ῳ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον παραβαλε ιν
ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τ ῳ δοθέντι.

Verilen bir doğru boyunca
verilen bir çokgene eşit
bir paralelkenar uygulamak
verilen paralelkenara benzer kadar aşan.



Şekil 11: Uygulanan ve aşan bir paralelkenar

Öklid'in çözümü.

Açıklama. Verilen doğru AB, çokgen C, ve paralelkenar D olsun.

Belirtme. Şekil 11'deki gibi öyle bir AL paralelkenarını inşa edeceğiz ki

$$AL = C, \qquad BL \sim D.$$

Düzeltme.

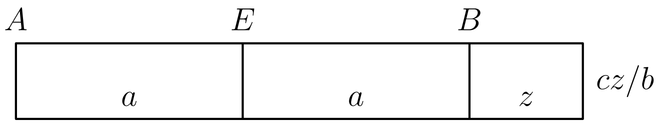
1. $AE = EB$ olsun [*Öğeler* I.10].

2. $EF \sim D$ olsun [*Öğeler* VI.18].

3. $HK = EF + C$ ve $HK \sim D$ olsun [*Öğeler* VI.25].

Gösterme.

1. $HB = BK$ [*Öğeler* I.43].
2. $AH = HB$.
3. $AH = BK$.
4. $AL = HLKB$ *gnomonu* (**γνώμων**, güneş saatinin göstergesidir).
5. $HK = EF + HLKB$.
6. $C = HLKB$.
7. $AL = C$.
8. $BL \sim D$ [Teorem 3]. □



Şekil 12: Kartezyen çözüm

Problem 5'in Kartezyen çözümü de vardır. Verilen

- doğrunun uzunluğu $2a$,
- çokgenin alanı x^2,
- paralelkenarın
  - eni b,
  - yüksekliği c

olsun. İstediğimiz fazla gelen paralelkenarın eni, z olsun (Şekil 12'ye bakın). O zaman istediğimiz paralelkenarın yüksekliği,

cz/b olur, ve

$$x^2 = (2a+z)\cdot\frac{cz}{b},$$
$$bx^2 = cz(2a+z).$$

Öyleyse z belirlenir. Aslında $z+a=y$ ise, o zaman

$$z = y-a, \qquad\qquad 2a+z = y+a,$$

dolayısıyla

$$bx^2 = c(y^2-a^2),$$
$$cy^2 - bx^2 = a^2c,$$

ve sonunda (1.1) gibi

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2c/b} = 1$$

hiperbol denklemi çıkar.

6 Koni kesitleri

Bir **koni,** *tepesi* ve *tabanı* tarafından belirlenir. Koninin

- **tabanı,** bir dairedir;
- **tepesi,** tabanın düzleminde olmayan bir noktadır.

O zaman koninin

- **yüzeyi,** tepeden tabanın çevresine giden tüm doğruların noktalarından oluşur;
- **ekseni,** tabanın merkezinden tepeye giden doğrudur.

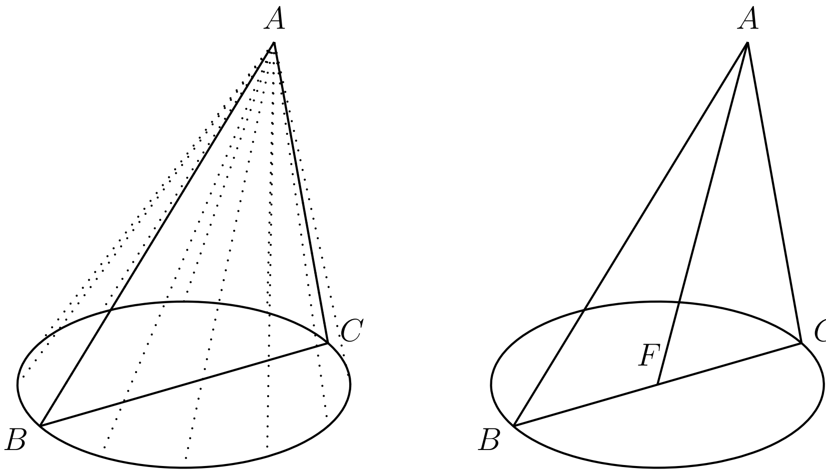
Eksen, tabana dik olmayabilir. Örneğin Şekil 13'te

- tepesi A,
- tabanı, çapı BC olan daire,
- ekseni FA

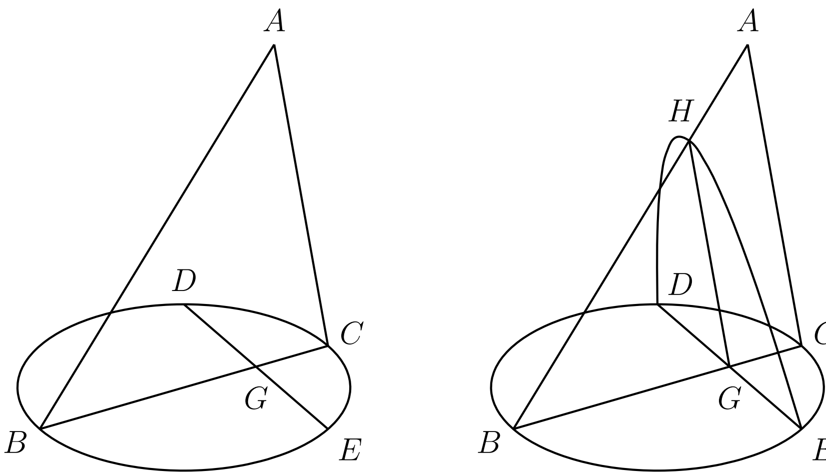
olan koni vardır. ABC üçgeni, koninin bir **eksen üçgenidir.** Koninin tabanının bir DE kirişi seçilmiş olsun. Bu kirişin orta dikmesinin BC çapı olduğunu, Teorem 4'ü kullanarak varsayabiliriz. Koninin tabanının BC çapı ve DE kirişi, Şekil 14'teki gibi G noktasında kesişsin.

Bir düzlem, DE kirişinden geçsin. Bu düzlem, eksen üçgenini bir GH doğrusunda keser. H noktasının AB doğrusunda olduğunu varsayabiliriz. Düzlem, koninin yüzeyini bir DHE eğrisinde keser. Bu eğri, bir **koni kesitidir,** ve HG, koni kesitinin bir **diyametresidir** (διάμετρον), çünkü DE kirişine paralel olan kirişleri ikiye böler. İki durum vardır.

1. Eğer GH diyametresi AC doğrusuna paralel ise, o zaman kesit bir **paraboldür.** Tekrar Şekil 14'e bakın.
2. Diğer durumda, uzatılınca GH, AC doğrusunu bir K noktasında keser. O zaman HK doğrusunun Z orta nok-



Şekil 13: Koni, tepesi, tabanı, yüzeyi, ekseni, ve bir eksen üçgeni

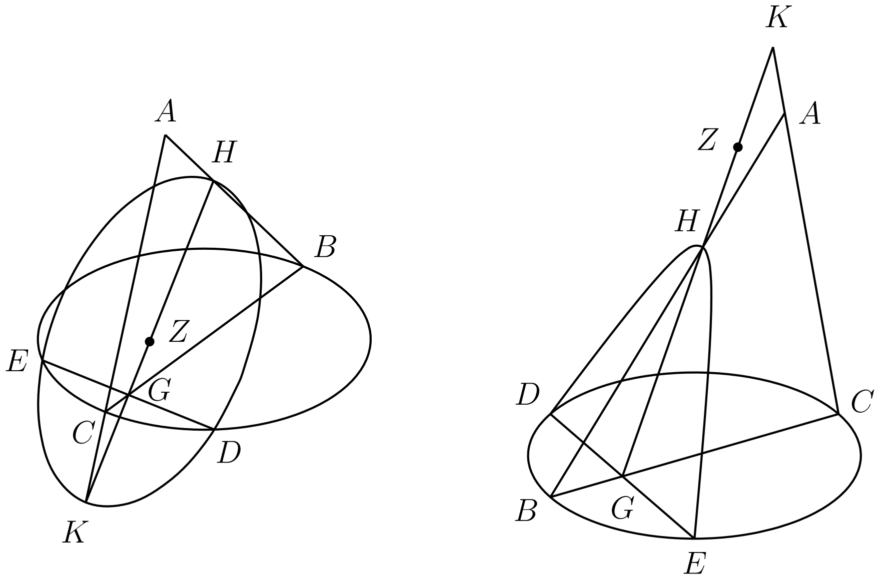


Şekil 14: Koninin tabanının bir kirişi; parabol ve diyametresi

tası, koni kesitinin **merkezidir.** Bu merkez,

- koninin içinde ise, kesit bir **elipstir;**
- koninin dışında ise, kesit bir **hiperboldür.**

Şekil 15'e bakın.



Şekil 15: Merkezli koni kesitleri ve diyametreleri

Koni kesitimiz, hiperbol olsun. Teorem 6'ya göre

$$DG^2 = BG \cdot GC.$$

Tabana paralel olan bir düzlem, koniyi kessin. Bu düzlem, HG doğrusunu bir L noktasında keser, ve eksen üçgenini bir MN doğrusunda keser. Ayrıca düzlem, koninin yüzeyini bir çemberde keser. Şekiller 16 ve 17'ye bakın. O zaman koni kesitinin düzlemi, bu çemberi bir PQ kirişinde keser. MN doğrusu, çemberin bir çapıdır ve PQ kirişinin orta dikmesidir. Özel olarak,

$$PL = LQ.$$

Teorem 6 sayesinde

$$\frac{DG^2}{PL^2} = \frac{BG \cdot GC}{ML \cdot LN} = \frac{BG}{ML} \cdot \frac{GC}{LN},$$

ve sonuç olarak, Teorem 2'den

$$\frac{DG^2}{PL^2} = \frac{HG}{HL} \cdot \frac{KG}{KL}. \tag{6.1}$$

Şimdi Şekil 18'deki gibi Problem 3'ü kullanarak

$$GR \cdot GH = DG^2, \qquad LS \cdot LH = PL^2$$

olsun. O zaman (6.1) eşitliğinden

$$\frac{RG}{SL} = \frac{KG}{KL},$$

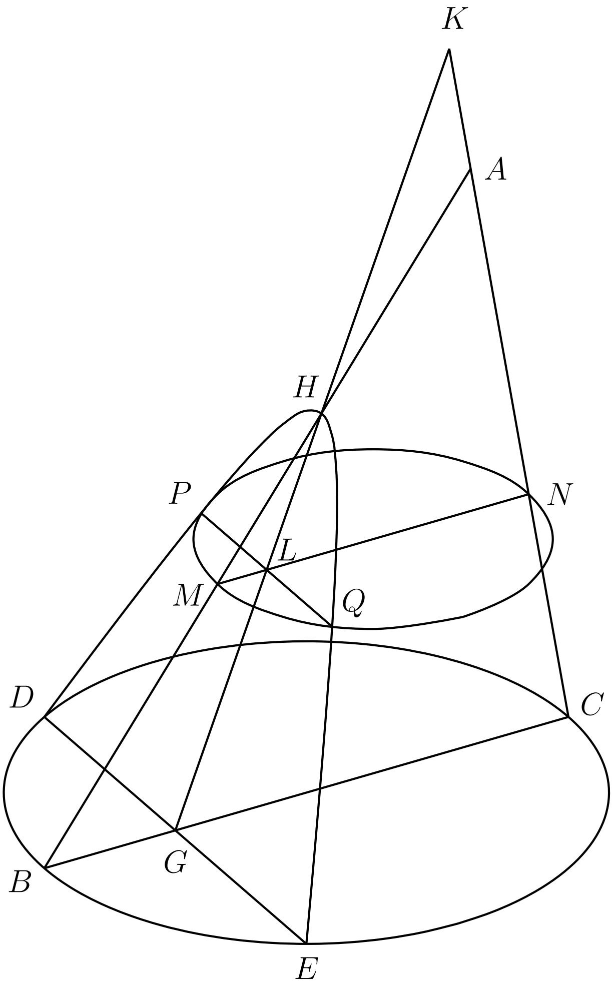
dolayısıyla (Teorem 3'ten) R, S, ve K, bir doğrudadır.

Şimdi KG doğrusuna H noktasındaki dikme, RK doğrusunu T noktasında kessin. O zaman Problem 5'teki gibi

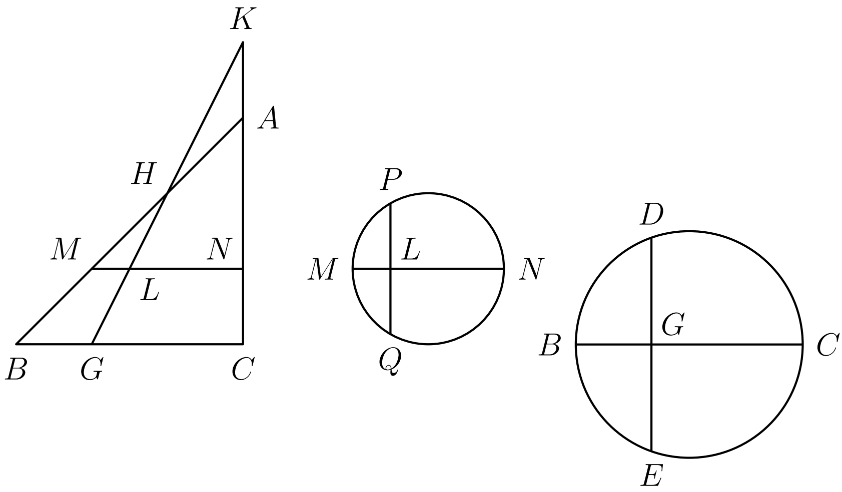
> Verilen HT doğrusuna
> DG doğrusundaki kareye eşit olan
> RH dikdörtgenini uygulandık
> verilen KT dikdörtgenine benzer bir dikdörtgen
> kadar aşan ($\dot{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda o\nu$).

Bu yüzden DHE koni kesitimize **hiperbol** ($\dot{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$) denir. Bu tanım, Pergeli Apollonius'ün *Koni kesitleri* [1, 2] eserinin I. kitabının 12. önermesinde bulunur. Bu eserin III. kitabında odak özelliği anlatılır. HT doğrusuna **dik kenar** ($\dot{o}\rho\theta\acute{\iota}\alpha$ $\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}$, latus rectum) denir. Aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{HT}{HK} = \frac{RG}{GK} = \frac{RG \cdot GH}{GK \cdot GH} = \frac{BG \cdot GC}{GK \cdot GH} = \frac{BG}{GH} \cdot \frac{GC}{GK}.$$



Şekil 16: Konide hiperbol



Şekil 17: Koninin kesen düzlemleri

O zaman Şekil 18'deki gibi $AV \parallel KH$ ise

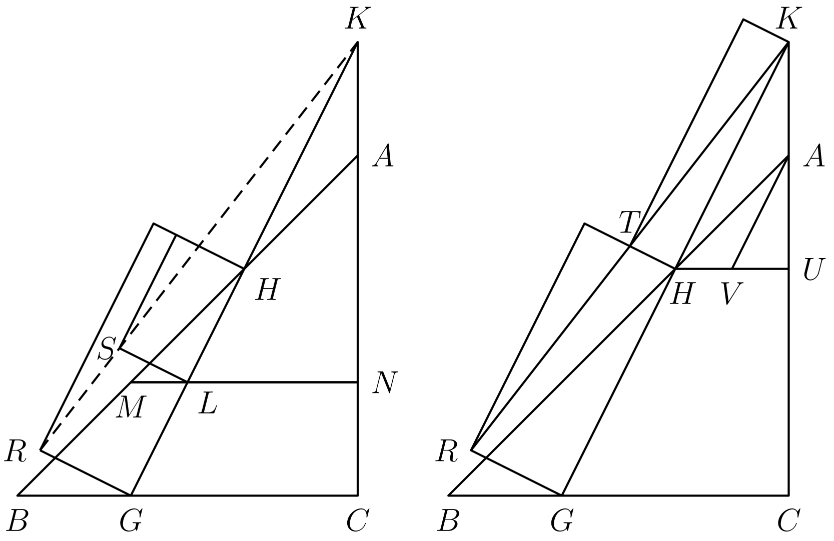
$$\frac{BG}{GH} = \frac{HV}{VA}, \qquad \frac{GC}{GK} = \frac{VU}{VA},$$

ve sonuç olarak

$$\frac{HT}{HK} = \frac{HV \cdot VU}{VA^2}.$$

Hiperbolün GE ve LQ gibi yarıkirişleri, **ordinatlardır,** ve onlara paralel olan ve H noktasından geçen doğru, hiperbole teğettir. Hiperbolün diyametresinden kesilmiş HG parçası, GE ordinatına uyan **apsistir** (abscissa, bir şeyden kesilmiş bir şey; $\dot{\alpha}\pi o\lambda\alpha\mu\beta\alpha\nu o\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$, bir şeyden alınmiş bir şey [8]). HK doğrusu, hiperbolün **çapraz kenarıdır** ($\pi\lambda\alpha\gamma\acute{\iota}\alpha$ $\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}$, latus transversum).

Şimdi hiperbolün HT dik kenarını ve HK çapraz kenarını kullanarak GE ordinatının ve GH apsisinin ilişkilerini aşağı-



Şekil 18: Hiperbolün dik kenarı

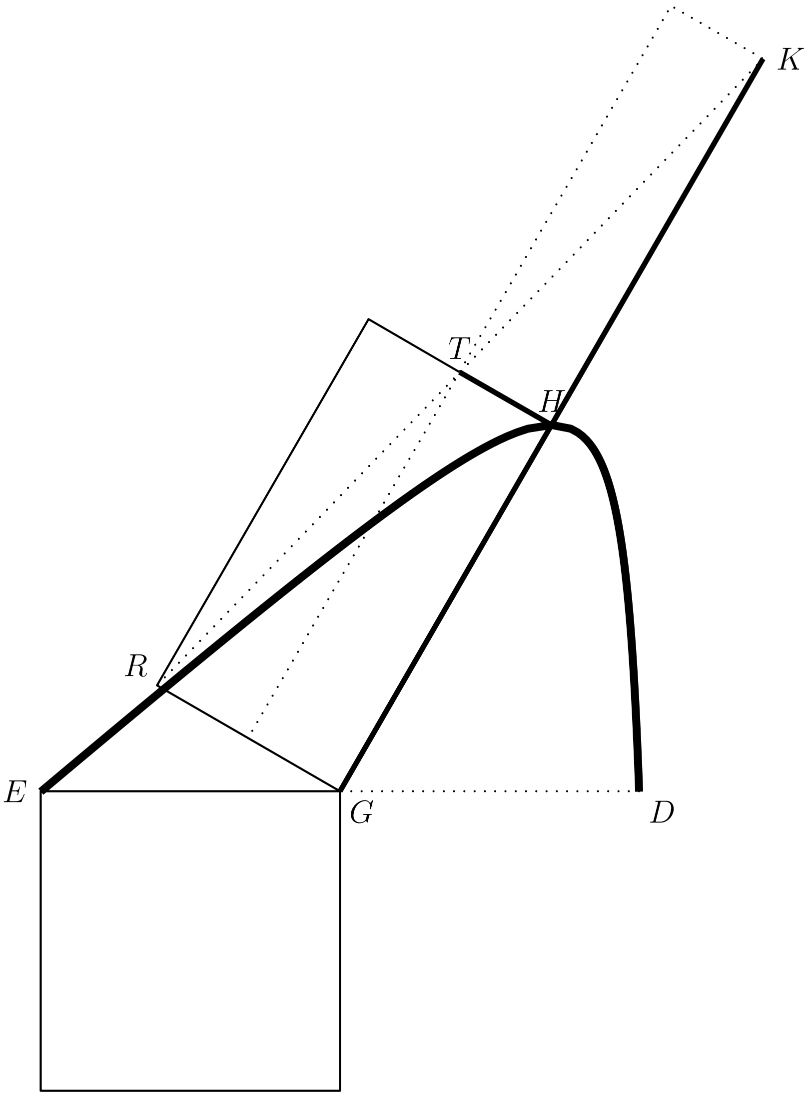
daki gibi ifade edebiliriz. Eğer

$$GR : HT :: GK : HK$$

ise, o zaman

$$GE^2 = GR \cdot GH.$$

Şekil 19'a bakın.



Şekil 19: Hiperbol

Kaynakça

[1] Apollonius of Perga. *Apollonii Pergaei Qvae Graece Exstant Cvm Commentariis Antiqvis*, volume I. Teubner, 1974. Edited with Latin interpretation by I. L. Heiberg. First published 1891.

[2] Apollonius of Perga. *Conics. Books I–III.* Green Lion Press, Santa Fe, NM, revised edition, 1998. Translated and with a note and an appendix by R. Catesby Taliaferro, with a preface by Dana Densmore and William H. Donahue, an introduction by Harvey Flaumenhaft, and diagrams by Donahue, edited by Densmore.

[3] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük.* Kabalcı, İstanbul, 2011.

[4] Euclid. *Euclidis Elementa*, volume I of *Euclidis Opera Omnia.* Teubner, Leipzig, 1883. Edited with Latin interpretation by I. L. Heiberg. Books I–IV.

[5] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's* Elements. Dover Publications, New York, 1956. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath. In three volumes. Republication of the second edition of 1925. First edition 1908.

[6] Euclid. *The Bones: A handy where-to-find-it pocket reference companion to Euclid's* Elements. Green Lion Press,

Santa Fe, NM, 2002. Conceived, designed, and edited by Dana Densmore.

[7] Euclid. *Euclid's Elements*. Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002. All thirteen books complete in one volume. The Thomas L. Heath translation, edited by Dana Densmore.

[8] David Pierce. Abscissas and ordinates. *J. Humanist. Math.*, 5(1):223–264, 2015. `scholarship.claremont.edu/jhm/vol5/iss1/14`.