Öklid'in *Porizmalar*'ı için *Derleme*'nin VII. Kitabının 38 Lemmasından İlk 19 Lemması

İskenderiyeli Pappus
Çeviren David Pierce

29 Eylül 2015, 29 Eylül 2016, 1 Mart 2019

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce
polytropy.com

dpierce@msgsu.edu.tr

İçindekiler

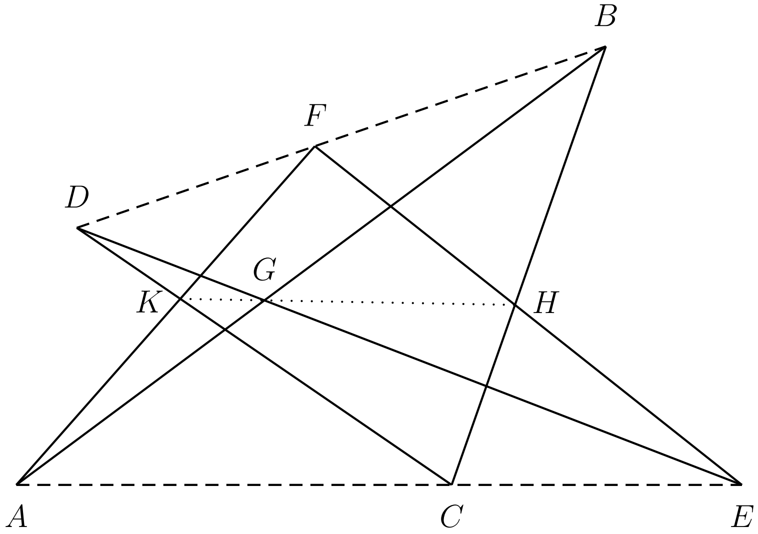
Giriş

İskenderiyeli Pappus (Πάππος Ἀλεξανδρεύς), M.S. 320 yılı civarında *Derleme* (Συναγωγή) adlı eserini yazdı [20, s. 564]. *Derleme*'nin yedinci kitabı, *Analiz Hazinesi* (Αναλυόμενος τόπος) adlı eserler için bir rehberdir. *Hazine*'nin içindekiler, bu metnin arka sayfasındadır [20, s. 598–601]. Apollonius'un *Koni Kesitleri* ve Öklid'in *Veriler*'i hariç, *Hazine*'nin çoğu şimdi kaybolmuştur. Özel olarak Öklid'in *Porizmalar*'ı (Πορίσματα) kaybolmuştur. Ama onu okumaya yardımcı olmak için, Pappus 38 lemmayı verir. Onların ilk 19'nun çevirisi, bu metni oluşturur.

Lemma I ve Lemma XIX arasından iki önemli teorem çıkar.

1. **Altıgen Teoremi'ne** göre, eğer bir altıgenin köşeleri münavebe ile iki doğruda otururalrsa, o zaman altıgenin karşıt kenarlarının kesişim noktaları da bir doğruda otur. Örneğin Şekil 1'de C noktası, AE doğrusundadır, ve F noktası, BD doğrusundadır, dolayısıyla K noktası, GH doğrusundadır.
2. **Dörtgen Teoremi'ne** göre, eğer dört noktanın ikilerinden geçen altı doğru bir doğruyu keserse, o zaman kesişim noktalarından beşi, altıncıyı belirler. Örneğin Şekil 2'de $GHKL$ dörtgeninin köşelerinin ikisinden geçen doğrular, AF doğrusunu A, B, C, D, E, ve F noktalarında keser, ve $MNPQ$ dörtgeninin köşelerinin ikisinden geçen beş doğru, sırasıyla A, B, C, D ve E noktalarından geçer, dolayısıyla PQ altıncı doğrusu, F noktasından geçer.

Aslında Altıgen ve Dörtgen Teoremi'nin farklı durumları var-



Şekil 1: Altıgen Teoremi

dır, çünkü kesmeden doğrular paralel olabilir.

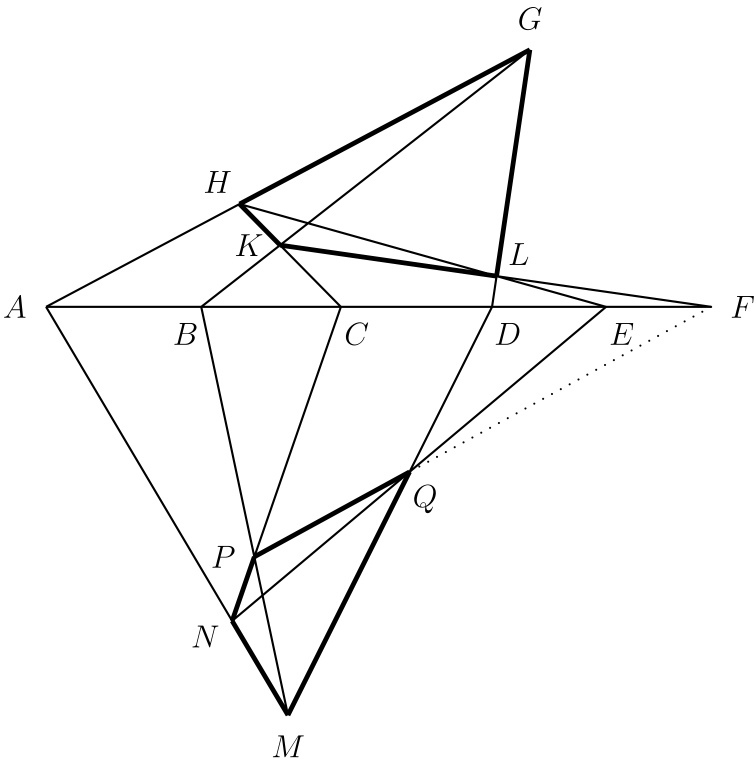
1. Lemma VIII, XII, ve XIII, Altıgen Teoremi'nin bazı durumlarıdır. Son iki lemma, Lemma III, X, ve XI'i kullanır.
2. Lemma I, II, IV, V, VI, ve VII'sinin konusu, Dörtgen Teoremi'dir.

Eğer Altıgen veya Dörtgen Teoremi'nin bir durumunun şekli camda çizilirse, o zaman şeklin gölgesi veya *izdüşümü,* teoremin aynı veya farklı bir durumunun şeklidir. Kısaca teorem, **izdüşüren geometrinin** bir teoremidir.

Öklid'in *Öğeler*'inin [6] Kitap I'inin

Önerme 31'inin sayesinde verilen bir noktadan geçen, noktayı içermeyen verilen bir doğruya paralel olan bir doğru çizilebilir;

Önerme 29'una göre aynı noktadan geçen, aynı doğruya pa-



Şekil 2: Dörtgen Teoremi

ralel olan başka bir doğru yoktur;

Önerme 30'una göre aynı doğruya paralel olan doğrular birbirine de paraleldir.

Bundan dolayı paralellik, bir denklik bağıntısıdır.

Doğruların her paralellik sınıfı için, Öklid düzlemine yeni bir noktayı ekleyebiliriz. Bu nokta için **sonsuzda** ifadesini kullanırız, ve paralellik sınıfındaki doğruların kesişim noktası olarak bu sonsuzda olan noktayı sayarız. Tüm sonsuzda olan noktalar, **sonsuzdaki doğruyu** oluşturur. Öklid düzleminin noktaları ve sonsuzda olan noktalar, **izdüşüren düzlemin** noktalarıdır, ve Öklid düzleminin doğruları ve sonsuzdaki doğru, izdüşüren düzleminin doğrularıdır. İzdüşüren düzlemde Altıgen ve Dörtgen Teoremlerinden her birinin tek bir durumu vardır.

Pappus, bu teoremleri Öklid düzleminde kanıtlar, ve bunun için *alanlar* ve *orantılar* kullanır.

Öklid için *eşit* (ἴσος), *aynı* (αὐτός) değildir. İki farklı sınırlanmış doğru birbirine eşit olabilir. Paralellik gibi eşitlik bir denklik bağıntısıdır. Sınırlanmış bir doğrunun eşitlik sınıfı, doğrunun **uzunluğu** olarak anlaşılabilir. Benzer şekilde sınırlanmış bir yüzeyin **alanı,** yüzeyin eşitlik sınıfı olarak tanımlanabilir.

Eğer ΑΒ ve ΓΔ doğru ise, genişliği ΑΒ'nın uzunluğu olan ve yüksekliği ΓΔ'nın uzunluğu olan bir dikdörtgen inşa edilebilir, ve bu dikdörtgeni

$$\mathsf{AB} \cdot \Gamma\Delta$$

ifadesiyle yazacağız; Pappus

τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ
ΑΒ ve ΓΔ altındaki

ifadesini kullanıyor.

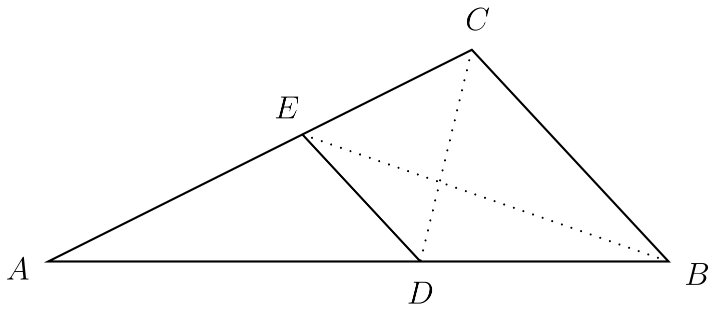
Oranların soyut kuramı, *Öğeler*'in beşinci kitabındadır. Öklid'in tanımladığı her oranı, pozitif gerçel sayı olarak görebiliriz.

Bir ΑΒ doğrusunun, bir ΓΔ doğrusuna oranı vardır. Bu oranı

$$\mathsf{AB} : \Gamma\Delta$$

olarak yazacağız; Pappus

λόγος ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ
ΑΒ'nın ΓΔ'ya oranı



Şekil 3: Thales Teoremi

ifadesini kullanıyor.

Aynı şekilde bir $\mathsf{AB} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta}$ dikdörtgeninin, bir $\mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta}$ dikdörtgenine oranı vardır. Bu oranı

$$\mathsf{AB} \cdot \mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{H\Theta}$$

olarak yazacağız.

Her sınırlanmış doğru, yüzey, veya cisim, bir **büyüklüktür** (τὸ μεγέθος). Aslında Öklid, iki büyüklüğün oranını (ὁ λόγος) tanımlamaz, ama iki oranın aynılığını (ἀνάλογον) tanımlar. Öklid'in tanımı aşağıda verilir; şimdilik tanımın sadece kullanacağımız sonuçlarını verelim.

Öğeler'inin birinci kitabının 36. ve 38. önermelerine göre aynı paralellerde olan ve eşit tabanlarda olan iki üçgen veya paralelkenar birbirine eşittir. Tabanlar eşit olmasa bile onların oranı vardır, ve çokgenlerin oranı da vardır, ve altıncı kitabının ilk önermesine göre bu iki oran aynıdır.

İki oranın aynılığı, bir **orantıdır** (ἡ ἀναλογία). Eğer böyle bir aynılığını :: işareti ile gösterirsek, o zaman Şekil 3'te

$$AD : DB :: ADE : DBE,$$
$$AE : EC :: ADE : DCE$$

orantıları vardır. Ayrıca eğer

$$DE \parallel BC$$

ise, o zaman

$$DBE = DCE,$$

ve bu durumda

$$AD : DB :: AE : EC.$$

Bu sonuç ve tersi, Öklid'in Önerme VI.2'sidir, ve bugün ona **Thales Teoremi** denir. Pappus bu teoremi sık sık kullanır.

Şimdi bir

$$A : B :: C : D$$

orantısı verilsin. Oranların aynılığının bir denklik bağıntısı olduğundan

$$C : D :: A : B$$

orantısı da doğrudur. Ayrıca *Öğeler*'in Kitap V'ine göre

- **tersine** (ἀνάπαλιν)

$$B : A :: D : C,$$

- **toplamayla** (συνθέντι)

$$A + B : B :: C + D : D,$$

- **çevirmeyle** (ἀναστρέψαντί) $A > B$ ise

$$A - B : B :: C - D : D,$$

- **izlemeyle** (ἐναλλάξ) A'nın C'ye oranı varsa

$$A : C :: B : D.$$

Bu kural daha vardır: **eşitlikten** (δι' ἴσου)

$$\left.\begin{array}{r} A : B :: D : E \\ B : C :: E : F \end{array}\right\} \implies A : C :: E : F,$$

ve daha genelde, eğer $A_1, \ldots, A_n$ ve $A_1, \ldots, B_n$ büyüklükleri verilirse, ve her durumda

$$A_k : A_{k+1} :: B_k : B_{k+1}$$

ise, o zaman eşitlikten

$$A_1 : A_n :: B_1 : B_n.$$

Herhalde Öklid "eşitlikten" diyor çünkü çokluklar olarak A_k'lerin ve B_k'lerin sayıları birbirine eşittir.

Tanıma göre $A : B$ ve $B : C$ oranlarının **bileşimi** (συνάπτω fiilinden συνημμένος), $A : C$ oranıdır. Eğer $B : C :: D : E$ ise, o zaman $A : C$ oranı, $A : B$ ve $D : E$ oranlarının bileşimiyle aynıdır. Bu orantıyı

$$A : C :: (A : B)(D : E)$$

biçiminde yazacağız. Örneğin aşağıdaki Lemma I'de Pappus

ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ συνῆται
ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ
καὶ τοῦ τῆς ΕΘ πρὸς ΘΗ
ΑΔ'nınki ΔΖ'a bileşir
ΑΒ'nınkinden ΒΕ'a
ve ΕΘ'nınkinden ΘΗ'ya

orantısını yazıyor; bunu

$$\mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta Z} :: (\mathsf{AB} : \mathsf{BE})(\mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta H})$$

olarak yazacağız. Lemma III'te Pappus

τοῦ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ συνῆται
λόγος
ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ
καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ
ΘΕ ΗΖ altındakinin ΘΗ ΖΕ altındakine bileşir
oranı
ΘΕ'nınkinden ΕΖ'ya
ve ΖΗ'nınkinden ΗΘ'ya

orantısını yazıyor; bunu

$$\mathsf{\Theta E} \cdot \mathsf{HZ} : \mathsf{\Theta H} \cdot \mathsf{ZE} :: (\mathsf{\Theta E} : \mathsf{EZ})(\mathsf{ZH} : \mathsf{H\Theta})$$

olarak yazacağız.

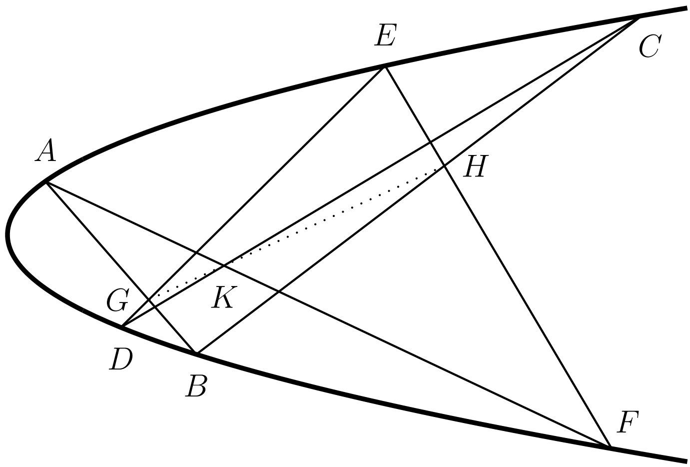
Pascal Teoremi

Altıgenin daha genel biçimi vardır. Bir altıgenin köşeleri bir koni kesitindeyse, karşıt kenarların kesişim noktaları bir doğrudadır. Örneğin Şekil 4'te A, B, C, D, E, ve F noktaları bir paraboldedir, ve (sonuç olarak) G, H, ve K bir doğrudadır.

Altıgenin karşıt kenarlarının kesişmesi için onlar uzatılmak zorunda olabilir. Örneğin Şekil 5'te A, B, C, D, E, ve F noktaları bir hiperbolün dallarındadır, ve (sonuç olarak) G, H, ve K bir doğrudadır.

Altıgenin karşıt kenarları paralel olabilir. Örneğin Şekil 6'da, AF ve CD birbirine paralel ise, o zaman GH de onlara paraleldir.

Altıgen Teoremi'nin genel biçimine **Pascal Teoremi** denir, çünkü Blaise Pascal 1640 yılında, 16 yaşında, teoremi bildirdi. (Pascal'in Fransızcası, [18] kaynağındadır; İngilizce çevirisi, [15, s. 326–30] ve [17, s. 163–8] kaynaklarındadır.)



Şekil 4: Parabolde Altıgen Teoremi

Porizmalar

Proklus'a göre **porizma** (τὸ πόρισμα) sözcüğünün iki anlamı vardır ([14, s. 236] veya [19, s. 478–81] kaynaklarından).

1. Birinci anlamına göre bir porizma, kanıtının başka bir önermenin kanıtından kolayca çıktığı bir önermedir.

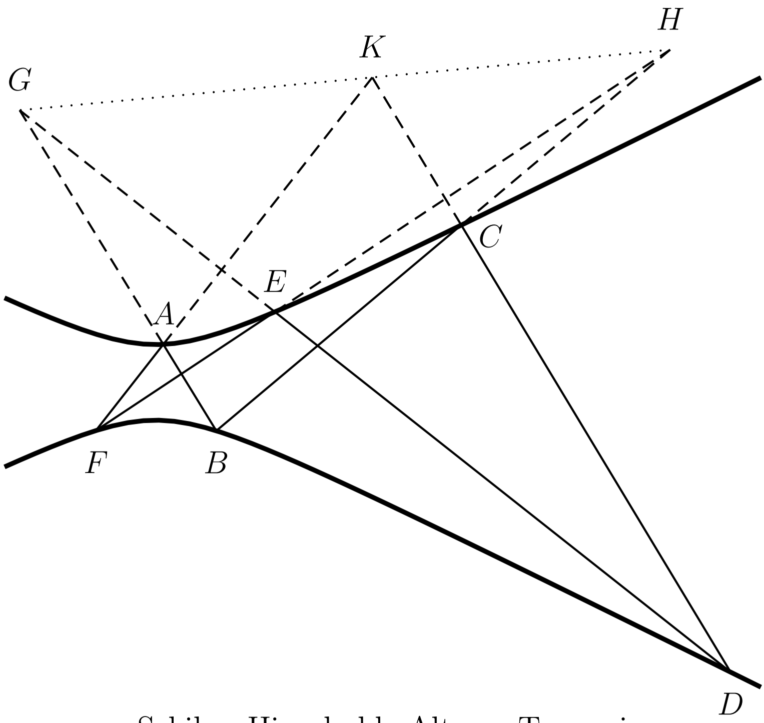
2. İkinci anlamına göre bir porizma, önermelerin üçüncü bir çeşitidir:

bir teoremde bir şey *görülüyor*;
bir problemde bir şey *yapılıyor*;
bir porizmada bir şey *bulunuyor.*

Örneğin

- ikizkenar bir üçgenin tabandaki açılarının eşitliği bir teoremdir;
- verilen açıyı ikiye bölmek bir problemdir;
- dairenin merkezini bulmak bir porizmadır.

Öklid'in *Öğeler*'inin Kitap VII'nin Önerme 2'sinde, birbirine



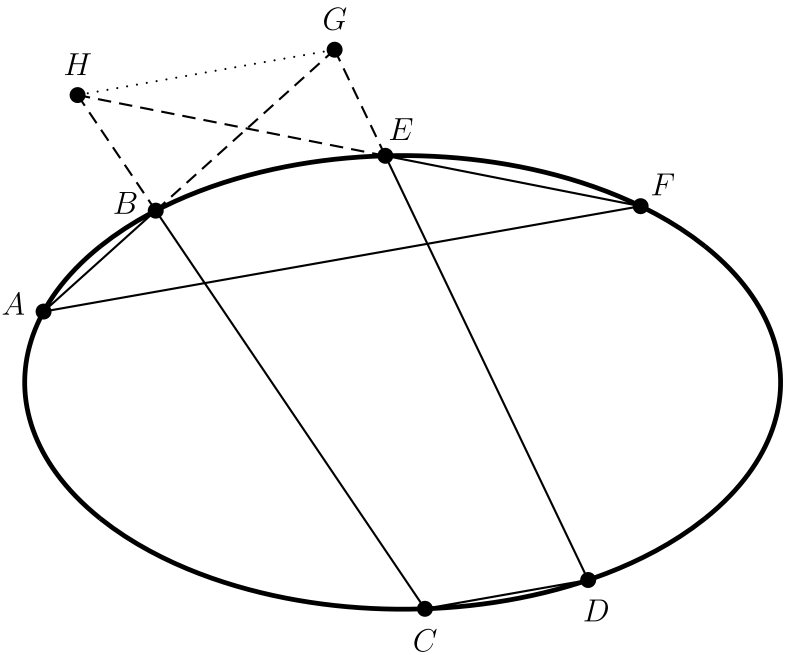
Şekil 5: Hiperbolde Altıgen Teoremi

asal olmayan iki sayının en büyük ortak böleni bulunur. Bu şekilde o önerme bir porizmadır, ve bundan birinci anlamıyla bir porizma çıkar: birbirine asal olmayan sayıların her ortak böleni, en büyük ortak bölenini böler.

Orantılar

Bir büyüklüğün **katı** (πολλαπλάσιον) alınabilir. Örneğin A bir büyüklük ise, katları

$$\mathsf{A}, \qquad \mathsf{A}+\mathsf{A}, \qquad \mathsf{A}+\mathsf{A}+\mathsf{A}, \qquad \mathsf{A}+\mathsf{A}+\mathsf{A}+\mathsf{A},$$



Şekil 6: Elipste Altıgen Teoremi'nin paralel durumu

vesairedir. Bunlar A, $2\mathsf{A}$, $3\mathsf{A}$, vesaire olarak yazılabilir. A gibi büyüklüktürler. Aslında A'nın herhangi bir katı

$$k\mathsf{A}$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki k katsayısı, bir sayma sayısıdır. Sayma sayılarının oluşturduğu küme

$$\mathbb{N}$$

olarak yazılabilir, ve k'nın sayma sayısı olduğunu göstermek için

$$k \in \mathbb{N}$$

ifadesini yazarız; ama Öklid bunun gibi ifadeler kullanmaz. Öklid için k ifademiz, isim değil, sıfat olurdu. Aslında *Öğeler*'in yedinci kitabındaki tanıma göre bir sayı (ὁ ἀριθμός), birimlerin (τὰ μονάδα) oluşturduğu bir çokluktur (τὸ πλῆθος). Bu tanıma göre bir $k\mathsf{A}$ katının kendisi bir sayıdır. Öklid için eğer B A'ya eşit olmayan bir büyüklük ise, o zaman $k\mathsf{A}$ ve $k\mathsf{B}$ büyüklük olarak birbirine eşit değildir, ama **kat olarak birbirine eşittir,** yani **eşit katlardır** (ἰσάκις πολλαπλασία).

Bazen A ve B büyüklükleri karşılaştırabilir: A B'dan büyük veya küçük olabilir, ve (büyüklük olarak) ikisi birbirine eşit olabilir. Sırasıyla

$$\mathsf{A} > \mathsf{B}, \qquad \mathsf{A} < \mathsf{B}, \qquad \mathsf{A} = \mathsf{B}$$

ifadelerini yazarız. İki büyüklüğün her biri doğru veya her biri figür ise, o zaman varsayıma göre büyüklüklerin her birinin bir katı, diğer büyüklükten büyüktür. Bu varsayıma **Arşimet Aksiyomu** denir, çünkü Arşimet onu yazıp kullandı [1, s. 36]; ama Arşimet'ten önce Öklid onu kullandı. Öklid, M.Ö. 300 civarında çalışıyordu; Arşimet, M.Ö. 212 yılında Siraküza'nın Romalılar tarafından alınmasında öldürüldü.

Eğer iki büyüklük Arşimet Aksiyomunu sağlarsa, **büyüklüklerin oranı vardır.** Bu şekilde A ve B'nın oranı vardır ancak ve ancak bir k sayma sayısı için $k\mathsf{A} > \mathsf{B}$ ve $\mathsf{A} < k\mathsf{B}$.

Şimdi dört tane büyüklük verilsin. Bunlardan birincisinin ve ikincisinin oranı olsun; üçüncünün ve dördüncünün oranı da olsun. Büyüklüklerden birincisinin ve üçüncüsünün herhangi eşit katı ve ikincinin ve dördüncünün herhangi eşit katı alınınca, eğer birincinin ve üçüncünün katları sırasıyla aynı zamanda ikincinin ve dördüncünün

1) katlarından büyük,
2) katlarına eşit, veya

3) katlarından küçük ise,

o zaman tanıma göre birincinin ikinciye **oranı,** üçüncünün dördüncüye **oranıyla aynıdır,** ve dört büyüklük **orantılıdır.**

Aslında büyüklükler A, B, Γ, ve Δ olsun. Eğer tüm k ve m sayma sayıları için

$$\begin{aligned} k\mathsf{A} > m\mathsf{B} &\iff k\Gamma > m\Delta, \\ k\mathsf{A} = m\mathsf{B} &\iff k\Gamma = m\Delta, \\ k\mathsf{A} < m\mathsf{B} &\iff k\Gamma < m\Delta \end{aligned}$$

denklikleri sağlanırsa, o zaman A, B, Γ, ve Δ orantılıdır, ve $\mathsf{A}:\mathsf{B}$ ve $\Gamma : \Delta$ oranları birbiriyle aynıdır. Bu durumda

$$\mathsf{A} : \mathsf{B} :: \Gamma : \Delta$$

ifadesini yazarız, ama yukarıda gördüğümüz gibi Öklid ve Pappus sadece sözler kullanırlar. Örneğin aşağıdaki Lemma III'de ΚΘ'nın ΘΛ'ya oranı, ΘΔ · ΒΓ'nın ΘΒ · ΓΔ'ya oranıyla aynıdır, dolayısıyla

$$\mathsf{K}\Theta : \Theta\Lambda :: \Theta\Delta \cdot \mathsf{B}\Gamma : \Theta\mathsf{B} \cdot \Gamma\Delta$$

ifadesini yazıyoruz, ama Pappus

ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ἡ ΘΛ,
οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ
Nasıl ΚΘ ΘΛ'ya olursa
böyle ΘΔ ΒΓ altındaki ΘΒ ΓΔ altındakine olur

yazıyor.

Pappus'un metninin bulunduğu el yazmasında, kısaltmalar kullanılır, ama matematik kavramları değil, sadece sözcükler için [13, p. 28–9].

Bu metin hakkında

Aşağıdaki çeviri için Hultsch'un [12] edisyonunu kullandım. Sadece bittikten sonra Jones'un [13] edisyonunu bulup onunla yaptığımı düzelttim.

Derleme'nin Kitap VII'sinde iki sıra vardır. Birinde 321 bölüm vardır; diğerinde 238 önerme vardır. Hultsch her sıra için Arap rakamlarını kullanır. Ayrıca Öklid'in *Porizmalar*'ı hakkındaki lemmalara Romen rakamları koyar. Yukarıda bahsettiğimiz gibi Pappus, oran ve orantılar için özel işaretler kullanmaz. Lemmaların kanıtlarını "*Kanıt*" ve □ arasında yazıyorum; Pappus bunun gibi ifadeler kullanmaz.

Dizgi için LaTeX yazılımını ve KOMA-Script `scrbook` *documentclass*'ını kullandım. Diyagramları, `pstricks` ve `pst-eucl` *package*'ları ile çizdim. Kullandığım Yunan fontu, Yunan Font Derneği'nin `gfsneohellenic` fontudur.

Öklid'in *Porizmalar*'ı için *Derleme*'nin VII. Kitabının 38 Lemmasından İlk 19 Lemması

Lemma I (Önerme 127)

193. Diyagram ΑΒΓΔΕΖΗ olsun, ve

$$\mathsf{AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma}$$

olsun, ve ΘΚ birleştirilmiş olsun. O zaman

$$\mathsf{\Theta K \parallel A\Gamma.}$$

Kanıt. Ζ'dan ΒΔ'ya paralel olan ΖΛ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma}$$

olduğundan tersine ve toplamayla ve izlemeyle (ve paralellerden)

$$\underbrace{\mathsf{\Delta A : AZ}}_{\mathsf{BA : A\Lambda}} \mathsf{:: \Gamma A : AH.}$$

Böylece

$$\mathsf{\Lambda H \parallel B\Gamma.}$$

Böylece (paralellerden)

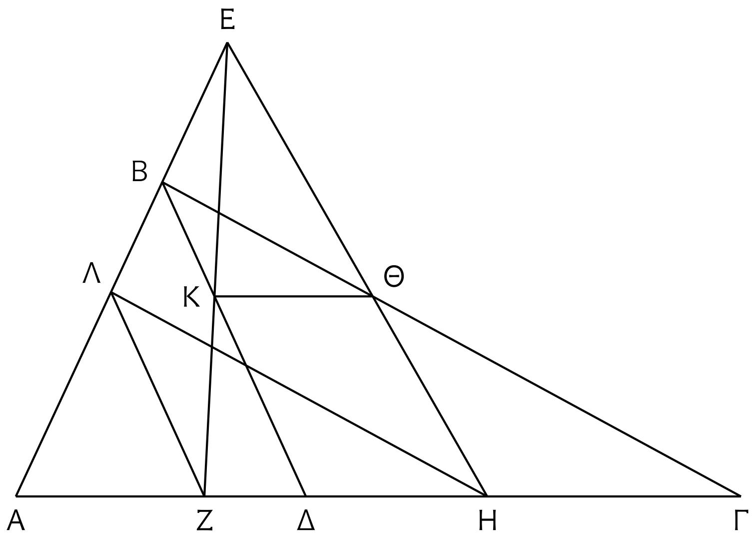
$$\mathsf{EB : B\Lambda ::} \begin{cases} \mathsf{EK : KZ} \\ \mathsf{E\Theta : \Theta H.} \end{cases}$$

Böylece

$$\mathsf{EK : KZ :: E\Theta : \Theta H.}$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta K \parallel A\Gamma.} \qquad \square$$



194. *Bileşik oranları kullanan kanıt.*

$$\mathsf{AZ : ZH :: A\Delta : \Delta\Gamma}$$

olduğundan, tersine

$$\mathsf{HZ : ZA :: \Gamma\Delta : \Delta A}.$$

Toplamayla ve izlemeyle ve çevirmeyle

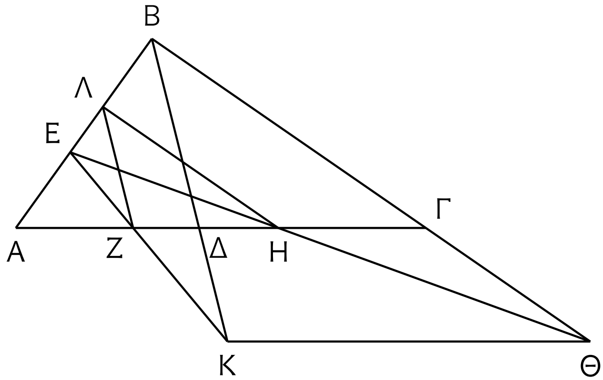
$$\mathsf{A\Delta : \Delta Z :: A\Gamma : \Gamma H}.$$

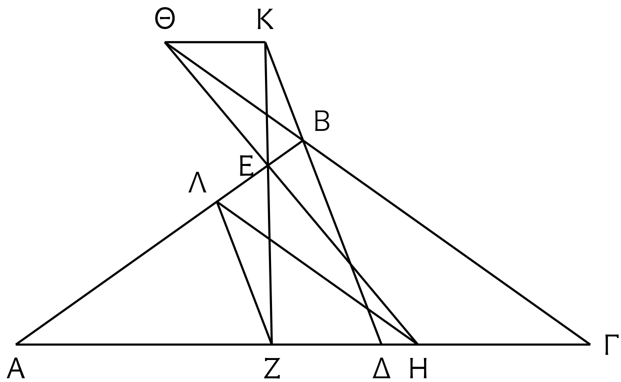
Ama

$$\mathsf{A\Delta : \Delta Z :: (AB : BE)(E\Theta : \Theta H)},$$

böylece

$$\mathsf{(AB : BE)(EK : KZ) :: (AB : BE)(E\Theta : \Theta H)}.$$



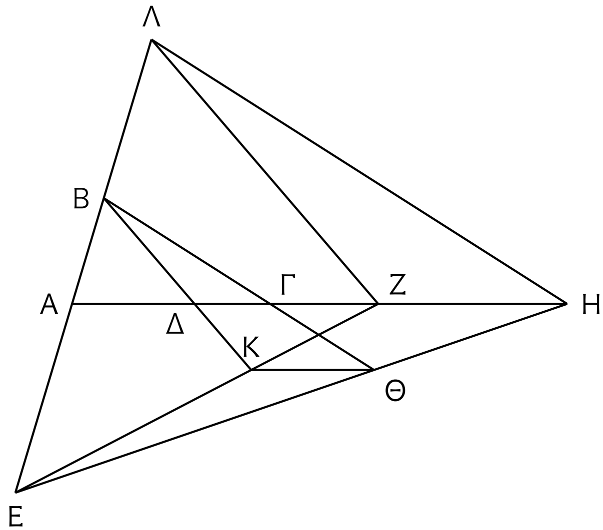


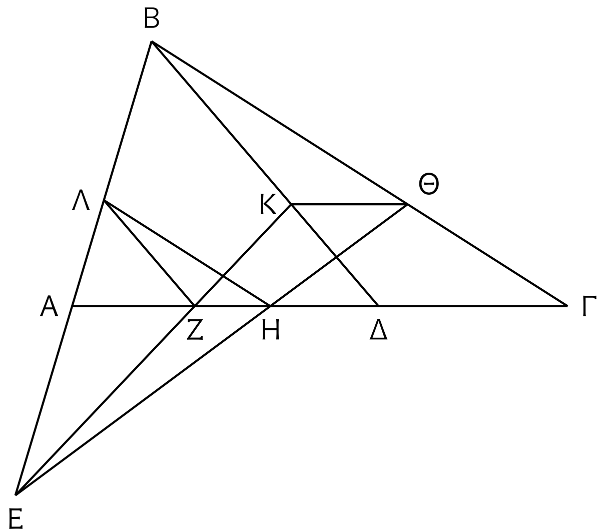
Ortak AB : BE oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$\mathsf{EK} : \mathsf{KZ} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta H}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta K} \parallel \mathsf{A\Gamma}. \qquad \square$$


Λ
B
A
Δ
Γ
Z
H
K
Θ
E


B
Θ
Λ
K
A
Z
H
Δ
Γ
E

Lemma II (Önerme 128)

195. Diyagram ΑΒΓΔΕΖΗΘ [olsun], ve ΑΖ ΔΒ'ya paralel olsun, ve

$$\mathsf{AE} : \mathsf{EZ} :: \Gamma\mathsf{H} : \mathsf{HZ}$$

[olsun]. O zaman

Θ, Κ, ve Ζ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. Η'dan ΔΕ boyunca ΗΛ ilerletilmiş olsun, ve birleştirilmiş olan ΘΚ Λ'ya uzatılmış olsun.

$$\mathsf{AE} : \mathsf{EZ} :: \Gamma\mathsf{H} : \mathsf{HZ}$$

olduğundan, izlemeyle

$$\mathsf{AE} : \Gamma\mathsf{H} :: \mathsf{EZ} : \mathsf{ZH}.$$

Ayrıca

$$\mathsf{AE} : \Gamma\mathsf{H} :: \mathsf{E}\Theta : \mathsf{H}\Lambda$$

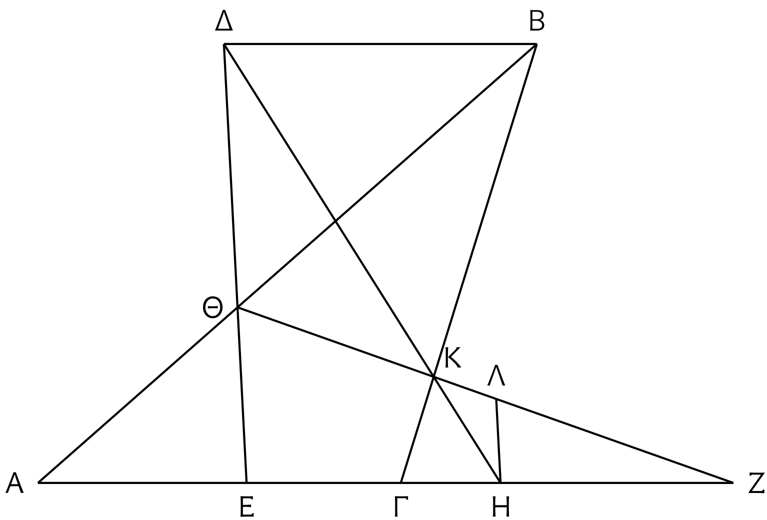
(çünkü iki doğru iki doğruya paralel, ve izlemeyle). Böylece

$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{E}\Theta : \mathsf{H}\Lambda.$$

Ayrıca ΕΘ ΗΛ'ya paraleldir. Böylece

Θ, Λ, Ζ'dan [geçen çizgi] doğrudur,

yani Θ, Κ, Ζ'dan. □


Δ
B
Θ
K
Λ
A
Z
E
Γ
H

Lemma III (Önerme 129)

196. Üç doğru AB, $\mathsf{\Gamma A}$, ve $\mathsf{\Delta A}$ üzerine iki doğru $\mathsf{\Theta E}$ ve $\mathsf{\Theta\Delta}$ sürdürülmüş olsun. O zaman

$$\mathsf{\Theta E} \cdot \mathsf{HZ} : \mathsf{\Theta H} \cdot \mathsf{ZE} :: \mathsf{\Theta B} \cdot \mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{\Theta\Delta} \cdot \mathsf{B\Gamma}.$$

Kanıt.

- $\mathsf{\Theta}$'dan geçen ve $\mathsf{Z\Gamma A}$'ya paralel olan $\mathsf{K\Lambda}$ ilerletilmiş olsun, ve $\mathsf{\Delta A}$ ve AB bununla kesişmiş olsun K ve $\mathsf{\Lambda}$ noktalarında;
- $\mathsf{\Lambda}$'dan da geçen ve $\mathsf{\Delta A}$'ya paralel olan $\mathsf{\Lambda M}$ de [ilerletilmiş olsun], ve $\mathsf{E\Theta}$ ile kesişmiş olsun M'de.

Dolayısıyla,

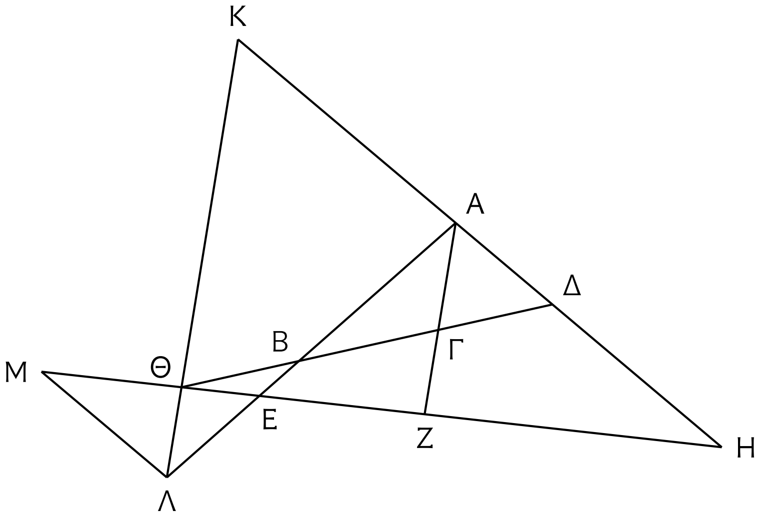
$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZA} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta\Lambda},$$
$$\mathsf{AZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{\Theta\Lambda} : \mathsf{\Theta M}$$

(çünkü ikisi, $\mathsf{\Theta K} : \mathsf{\Theta H}$ ile aynı, parallerden), [ve bunlar] olduğundan, böylece eşitlikten

$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta M}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta E} \cdot \mathsf{HZ} = \mathsf{EZ} \cdot \mathsf{\Theta M}.$$



ΕΖ · ΘΗ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned}\mathsf{E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta} &:: \mathsf{EZ \cdot \Theta M : EZ \cdot H\Theta}\\ &:: \mathsf{\Theta M : \Theta H}\\ &:: \mathsf{\Lambda\Theta : \Theta K}.\end{aligned}$$

Aynı [şekil]de

$$\mathsf{K\Theta : \Theta\Lambda :: \Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta}.$$

Böylece tersine

$$\mathsf{\Lambda\Theta : \Theta K :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma}.$$

Ve

$$\mathsf{\Lambda\Theta \cdot \Theta K :: E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta}$$

gösterilmiş oldu. Ve böylece

$$\mathsf{E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma}. \qquad \square$$

197. *Bileşik oranları kullanan kanıt.*

$$\mathsf{\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: (\Theta E : EZ)(ZH : H\Theta)},$$
$$\mathsf{\Theta E : EZ :: \Theta\Lambda : ZA},$$
$$\mathsf{ZH : H\Theta :: ZA : \Theta K}$$

olduğundan, böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot EZ :: (\Theta\Lambda : ZA)(ZA : \Theta K)}.$$

Ayrıca

$$\mathsf{(\Theta\Lambda : ZA)(ZA : \Theta K) :: \Theta\Lambda : \Theta K}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot HZ : \Theta H \cdot ZE :: \Theta\Lambda : \Theta K}.$$

Aynı [sebep]le

$$\mathsf{\Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Theta B \cdot \Gamma\Delta :: \Theta K : \Theta\Lambda}.$$

Ve tersine

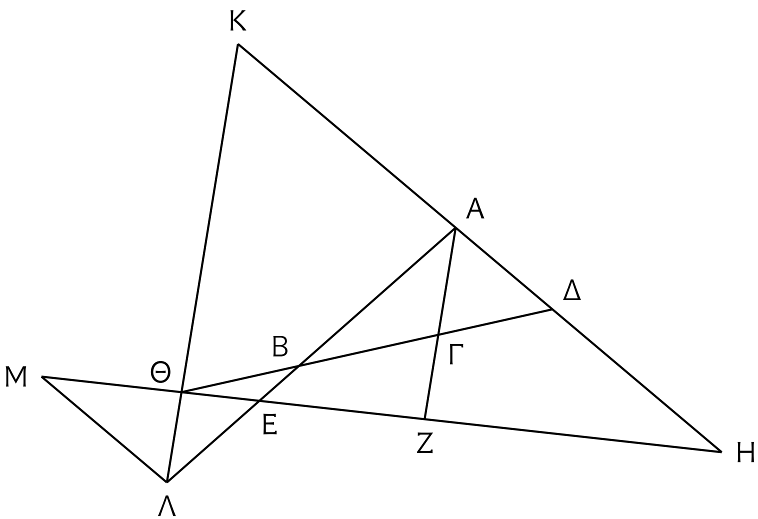
$$\mathsf{\Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma :: \Theta\Lambda : \Theta K}.$$

Ama

$$\mathsf{\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta\Lambda : \Theta K}$$

oldu. Ve böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot ZH : \Theta H \cdot ZE :: \Theta B \cdot \Gamma\Delta : \Theta\Delta \cdot B\Gamma}. \qquad \square$$


Κ
Α
Δ
Β
Γ
Μ
Θ
Ε
Ζ
Η
Λ

Lemma IV (Önerme 130)

198. Diyagram $\mathsf{AB\Gamma\Delta EZH\Theta K\Lambda}$ [olsun], ve

$$\mathsf{AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ}$$

olsun. O zaman

$\mathsf{\Theta}$, H, ve Z noktalarından [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. $\mathsf{AZ \cdot B\Gamma : AB \cdot \Gamma Z :: AZ \cdot \Delta E : A\Delta \cdot EZ}$ olduğundan izlemeyle

$$\underbrace{\mathsf{AZ \cdot B\Gamma : AZ \cdot \Delta E}}_{\mathsf{B\Gamma : \Delta E}} \mathsf{:: AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ.}$$

Ama (eğer K'dan AZ'ya paralel olan KM ilerletilmiş ise)

$$\mathsf{B\Gamma : \Delta E :: (B\Gamma : KN)(KN : KM)(KM : \Delta E),}$$
$$\mathsf{AB \cdot \Gamma Z : A\Delta \cdot EZ :: (BA : A\Delta)(\Gamma Z : ZE).}$$

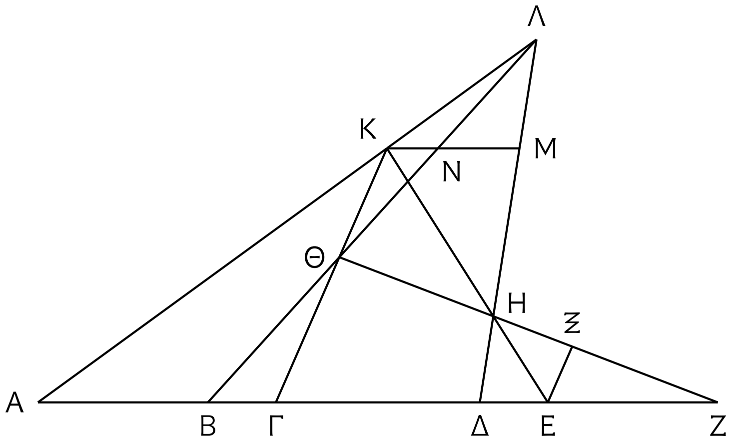
$\mathsf{NK : KM}$ ile aynı olan ortak $\mathsf{BA : A\Delta}$ kovulmuş olsun, Böylece

$$\text{kalan } \mathsf{\Gamma Z : ZE :: (}\underbrace{\mathsf{B\Gamma : KN}}_{\mathsf{\Theta\Gamma : K\Theta}}\mathsf{)(}\underbrace{\mathsf{KM : \Delta E}}_{\mathsf{KH : HE}}\mathsf{).}$$

Böylece

$\mathsf{\Theta}$, H, ve Z'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Zira eğer E'dan $\mathsf{\Theta\Gamma}$'ya paralel olan $\mathsf{E\Xi}$'yi ilerlersem, ve birleştirilmiş olan $\mathsf{\Theta H}$ $\mathsf{\Xi}$'ye uzatılmış olursa,



- KH : HE :: KΘ : EΞ,
- (ΓΘ : ΘK)(ΘK : EΞ) bileşimi ΘΓ : EΞ oranıyla değiştirilir, ve

ΓZ : ZE :: ΓΘ : EΞ.

ΓΘ EΞ'ye paralel olunca, böylece

Θ, Ξ, ve Z'dan [geçen çizgi] doğrudur

(zira bu apaçıktır), öyleyse ayrıca

Θ, H, ve Z'dan [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma V (Önerme 131)

199. Eğer diyagram ΑΒΓΔΕΖΗΘ ise [ve özel olarak Α, Η, ve Θ'dan geçen çizgi doğru ise],

$$\mathsf{A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma}$$

meydana gelir. Dolayısıyla ΑΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΒΓ olsun. O zaman

Α, Η, ve Θ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. Η'dan ΑΔ'ya paralel olan ΚΛ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{A\Delta : \Delta\Gamma :: AB : B\Gamma}$$

olduğundan, ama

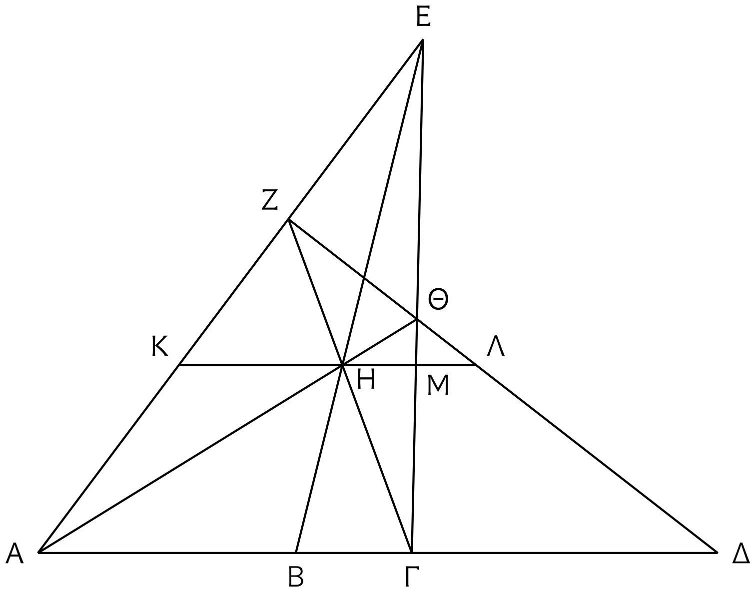
$$\mathsf{A\Delta : \Delta\Gamma :: K\Lambda : \Lambda H,}$$
$$\mathsf{AB : B\Gamma :: KH : HM}$$

olduğundan, böylece ayrıca

$$\mathsf{K\Lambda : \Lambda H :: KH : HM,}$$

ve

$$\text{kalan } \mathsf{H\Lambda} : \text{kalan } \mathsf{\Lambda M :: K\Lambda : \Lambda H}$$
$$\mathsf{:: A\Delta : \Delta\Gamma.}$$



İzlemeyle

$$\mathsf{A\Delta : H\Lambda :: \Gamma\Delta : \Lambda M}$$
$$\mathsf{:: \Delta\Theta : \Theta\Lambda},$$

ve HΛ AΔ'ya paraleldir. Böylece

A, H, ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu apaçıktır. □

Lemma VI (Önerme 132)

200. Yine eğer diyagram [ΑΒΓΔΕΖΗ] ise, ve ΔΖ ΒΓ'ya paralel ise,

$$\mathsf{AB} = \mathsf{B\Gamma}$$

meydana gelir. Dolayısıyla eşit olsun; o zaman

[ΔΖ ΒΓ'ya] paraleldir.

Kanıt. Olur da. Zira eğer ΕΒ'da ΗΒ'ya eşit olan ΒΘ'yı koyarsam, ve ΑΘ ve ΘΓ'yı birleştirirsem,

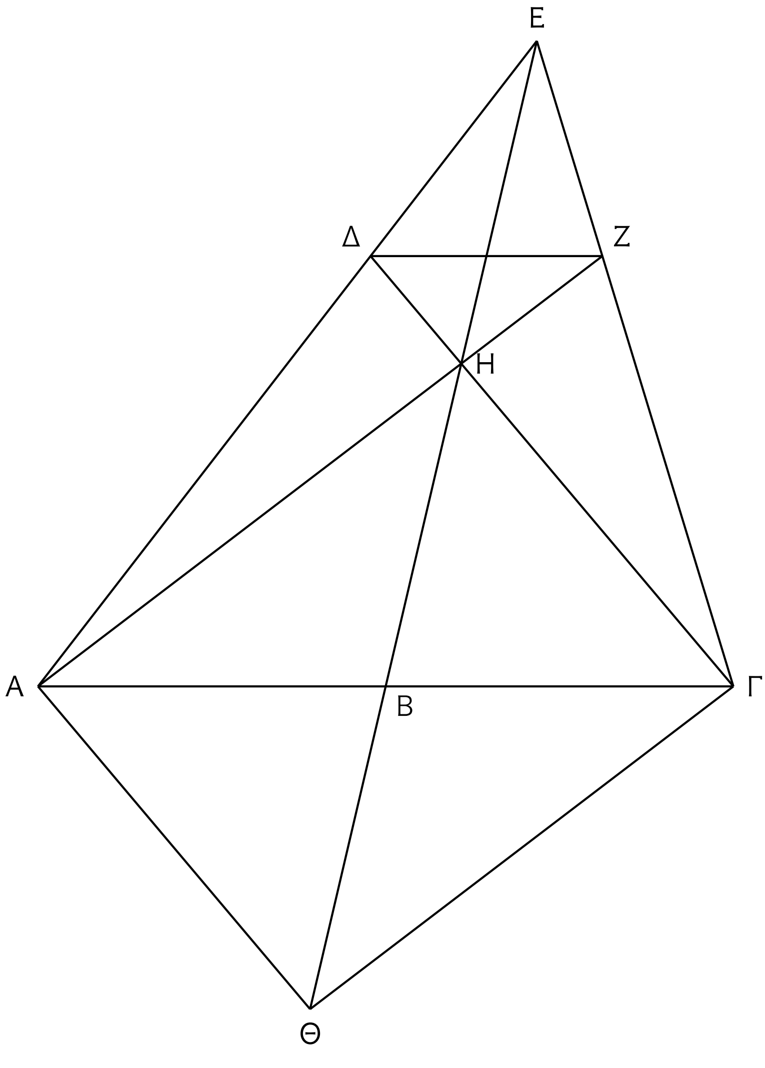
paralelkenar ΑΘΓΗ meydana gelir,

ve bundan

$$\mathsf{A\Delta} : \mathsf{\Delta E} :: \mathsf{\Gamma Z} : \mathsf{ZE}$$

(zira söylenmiş [iki oranın] her biri $\mathsf{\Theta H} : \mathsf{HE}$ oranıyla aynıdır). Öyleyse

$$\mathsf{\Delta Z} \parallel \mathsf{A\Gamma}. \qquad \square$$


Ε
Δ
Ζ
Η
Α
Β
Γ
Θ

Lemma VII (Önerme 133)

201. Diyagram olsun, ve ΔΒ ve ΒΓ'nın orta orantılısı ΒΑ olsun (τῶν ΔΒ ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΑ).[1] O zaman

$$ZH \parallel A\Gamma.$$

Kanıt. ΕΒ uzatılmış olsun, ve Α'dan ΔΖ doğrusuna paralel olan ΑΚ ilerletilmiş olsun, ve ΓΚ birleştirilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\Gamma B : BA :: AB : B\Delta,$$
$$AB : B\Delta :: KB : B\Theta$$

olduğundan, ayrıca

$$\Gamma B : BA :: KB : B\Theta.$$

Böylece

$$A\Theta \parallel K\Gamma.$$

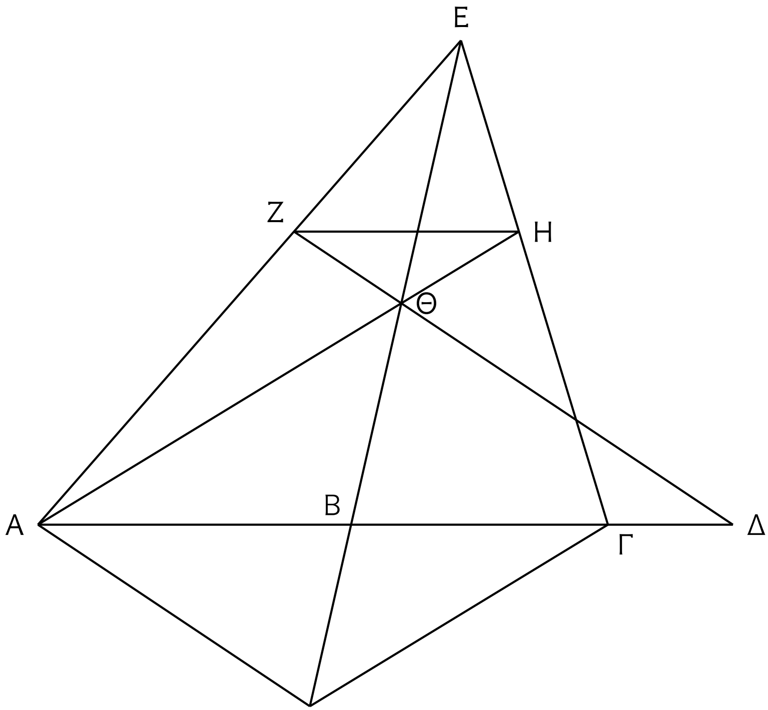
Dolayısıyla yine

$$AZ : ZE :: \Gamma H : HE$$

(zira her oran ΚΘ : ΘΕ oranıyla aynıdır). Öyleyse

$$ZH \parallel A\Gamma. \qquad \square$$

[1] Yani ΔΒ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΓ olsun. *Öğeler* Önerme VI.13'üne bakın. Yunan ἡ μέση ἀνάλογον teriminin İngilizcesi *mean proportional*'dır, örneğin lisede kullandığım geometri ders kitabında [21, s. 239]. Türkçe'de Demirtaş "orta orantılı" kullanır [4, s. 214], ama Atatürk "ortakoran" kullandı [2, s. 35].


E
Z
H
Θ
A
B
Γ
Δ

Lemma VIII (Önerme 134)

202. Diyagram (ὁ βωμίσκος "küçük sunak") ΑΒΓΔΕΖΗ olsun, ve

ΔΕ ΒΓ'ya, ve ΕΗ ΒΖ'ya, paralel olsun.

O zaman

$$\mathsf{\Delta Z} \parallel \mathsf{\Gamma H} \text{ da.}$$

Kanıt. ΒΕ, ΔΓ, ve ΖΗ birleştirmiş olsun. Böylece

ΔΒΕ üçgeni ΔΓΕ üçgenine eşittir.

Ortak ΔΑΕ üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

ΑΒΕ üçgeninin tümü, ΓΔΑ üçgeninin tümüne eşittir.

Yine ΒΖ ΕΗ'ya paralel olduğundan

ΒΖΕ üçgeni ΒΖΗ üçgenine eşittir.

Ortak ΑΒΖ üçgeni ayrılmış olsun. Böylece

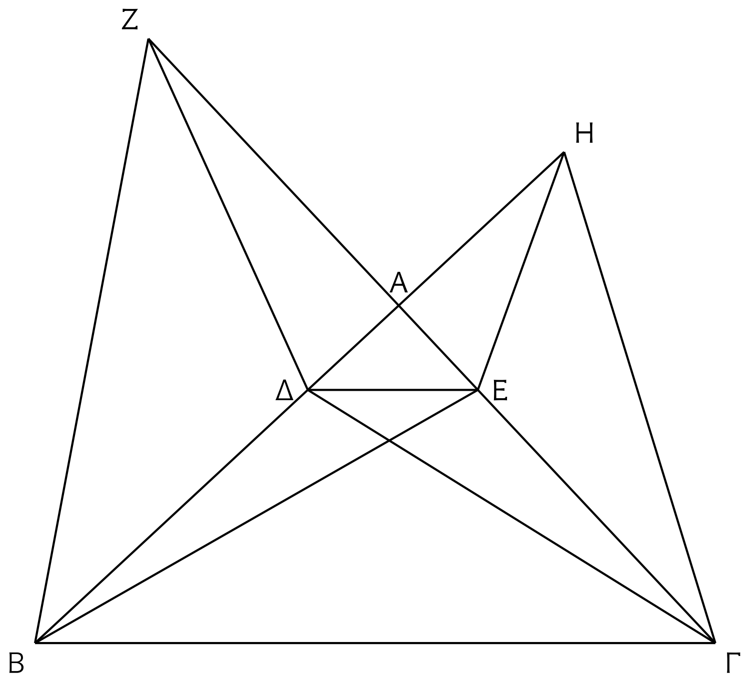
kalan ΑΒΕ üçgeni, kalan ΑΗΖ üçgenine eşittir.

Ama

ΑΒΕ üçgeni ΑΓΔ üçgenine eşittir.

Böylece

ΑΓΔ üçgeni de, ΑΗΖ üçgenine eşittir.



Ortak ΑΓΗ üçgeni eklenmiş olsun. Böylece

ΓΔΗ üçgeninin tümü, ΓΖΗ üçgeninin tümüne eşittir.

Ve aynı ΓΗ tabanındadırlar. Böylece

$$\Gamma\mathrm{H} \parallel \Delta\mathrm{Z}. \qquad \square$$

Lemma IX (Önerme 135)

203. Üçgen ΑΒΓ olsun, ve orada ΑΔ ve ΑΕ sürdürülmüş olsun, ve ΒΓ'ya paralel olan ΖΗ ilerletilmiş olsun, ve ΖΘΗ eğilmiş olsun, ve

$$\mathsf{B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E}$$

olsun. O zaman

$$\mathsf{K\Lambda \parallel B\Gamma}.$$

Kanıt. Zira

$$\mathsf{B\Theta : \Theta\Gamma :: \Delta\Theta : \Theta E}$$

olduğundan, böylece

$$\text{kalan BD} : \text{kalan GE} :: \mathsf{\Delta\Theta : \Theta E}.$$

Ve

$$\mathsf{B\Delta : E\Gamma :: ZM : NH;}$$

böylece ayrıca

$$\mathsf{ZM : NH :: \Delta\Theta : \Theta E}.$$

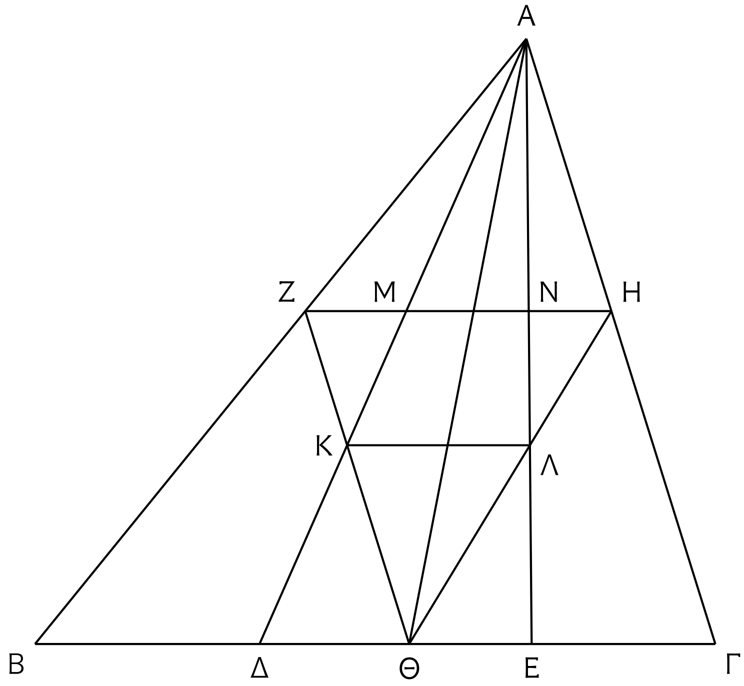
İzlemeyle

$$\mathsf{ZM : \Delta\Theta :: NH : \Theta E}.$$

Ama paralellerden

$$\mathsf{ZM : \Delta\Theta :: ZK : K\Theta},$$

$$\mathsf{HN : \Theta E :: H\Lambda : \Lambda\Theta},$$



ve böylece

$$\mathsf{ZK} : \mathsf{K\Theta} :: \mathsf{H\Lambda} : \mathsf{\Lambda\Theta}.$$

Böylece

$$\mathsf{K\Lambda} \parallel \mathsf{HZ}.$$

öyleyse ΓΒ'ya. □

Lemma X (Önerme 136)

204. İki doğru BAE ve $\mathsf{\Delta AH}$ üzerine, Θ noktasından geçen iki doğru $\mathsf{\Delta\Theta}$ ve $\mathsf{\Theta E}$ sürdürülmüş olsun, ve

$$\mathsf{\Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH}$$

olsun. O zaman

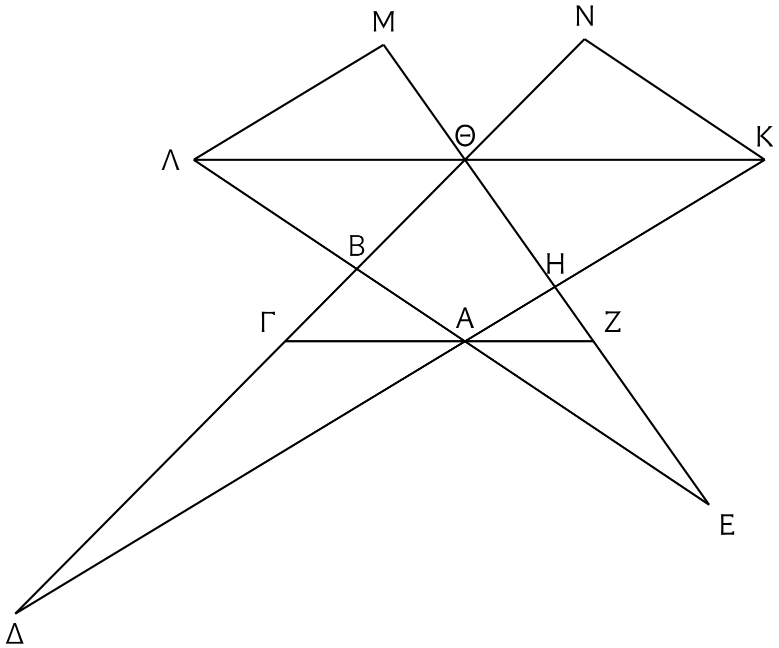
Γ, A, ve Z'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt.

- Θ'dan ve $\mathsf{\Gamma A}$'ya paralel olan $\mathsf{K\Lambda}$ ilerletilmiş olsun,
- AB ve $\mathsf{A\Delta}$ ile K ve Λ noktalarında kesişmiş olsun,
- Λ'dan $\mathsf{A\Delta}$'ya paralel olan $\mathsf{\Lambda M}$ ilerletilmiş olsun,
- $\mathsf{E\Theta}$ M'ye uzatılmış olsun,
- K'dan AB'ya paralel olan KN ilerletilmiş olsun,
- $\mathsf{\Delta\Theta}$ N'ye uzatılmış olsun.

Dolayısıyla paralellerden

$$\mathsf{\Delta\Theta : \Theta N :: \Delta\Gamma : \Gamma B}$$



olmuş olduğundan, böylece

$$\mathsf{\Delta\Theta \cdot \Gamma B = \Delta\Gamma \cdot \Theta N.}$$

$\mathsf{\Delta\Gamma \cdot B\Theta}$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned} \mathsf{\Delta\Theta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta} &:: \mathsf{\Gamma\Delta \cdot \Theta N : \Delta\Gamma \cdot B\Theta} \\ &:: \mathsf{\Theta N : \Theta B.} \end{aligned}$$

Ama

$$\mathsf{\Theta\Delta \cdot B\Gamma : \Delta\Gamma \cdot B\Theta :: \Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH}$$

varsayılır, ve

$$\begin{aligned} \mathsf{\Theta N : \Theta B} &:: \mathsf{K\Theta : \Theta\Lambda} \\ &:: \mathsf{H\Theta : \Theta M} \qquad\qquad \text{(paralellerden)} \\ &:: \mathsf{\Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE.} \end{aligned}$$

Ve böylece

$$\mathsf{\Theta H \cdot ZE : \Theta E \cdot ZH :: \Theta H \cdot ZE : \Theta M \cdot ZE.}$$

Böylece

$$\mathsf{\Theta E \cdot ZH = \Theta M \cdot ZE.}$$

Ve böylece

$$\mathsf{\Theta M : \Theta E :: HZ : ZE.}$$

Toplamayla ve izlemeyle

$$\mathsf{ME : EH :: \Theta E : EZ.}$$

Ama

$$\mathsf{ME : EH :: \Lambda E : EA,}$$

ve böylece

$$\mathsf{\Lambda E : EA :: \Theta E : EZ.}$$

Böylece

$$\mathsf{AZ \parallel K\Lambda.}$$

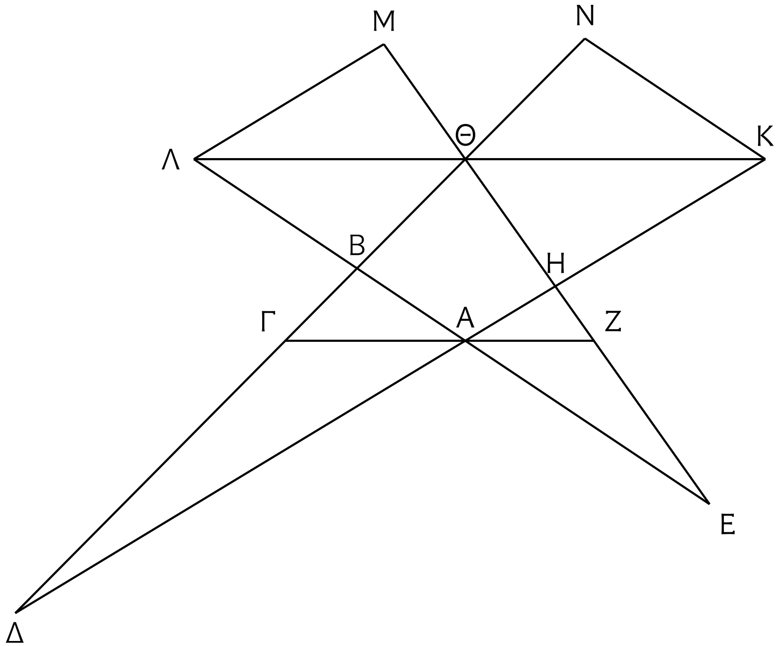
Ama

$\mathsf{\Gamma A}$ da [$\mathsf{K\Lambda}$'ya paraleldir].

Böylece

$\mathsf{\Gamma AZ}$ doğrudur. □

Bunun durumları, tersi olan önceden yazılmışlarınki [yani Lemma III'ün durumları] gibidir.


Μ
Ν
Θ
Λ
Κ
Β
Η
Γ
Α
Ζ
Ε
Δ

Lemma XI (Önerme 137)

205. Üçgen $\mathsf{AB\Gamma}$ [olsun], ve $\mathsf{A\Delta}$ $\mathsf{B\Gamma}$'ya paralel [olsun], ve sürdürülmüş olan $\mathsf{\Delta E}$, $\mathsf{B\Gamma}$ ile E noktada kesişmiş olsun. O zaman

$$\mathsf{\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE}.$$

Kanıt. $\mathsf{\Gamma}$'dan AE'a paralel olan $\mathsf{\Gamma\Theta}$ ilerletilmiş olsun, ve AB $\mathsf{\Theta}$'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{\Gamma A : AH :: \Gamma\Theta : ZH},$$
$$\mathsf{\Gamma A : AH :: E\Delta : \Delta H}$$

olduğundan, dahi

$$\mathsf{E\Delta : \Delta H :: \Theta\Gamma : ZH}.$$

Böylece

$$\mathsf{\Gamma\Theta \cdot \Delta H = E\Delta \cdot ZH}.$$

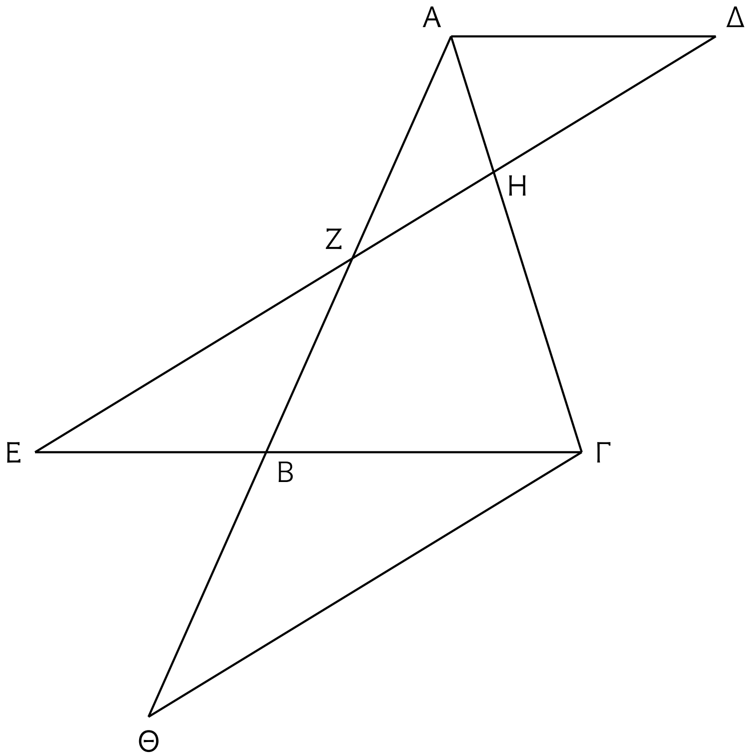
$\mathsf{EZ \cdot H\Delta}$ da başka rasgele bir [çarpımdır]. Böylece

$$\begin{aligned}\mathsf{\Delta E \cdot ZH : \Delta H \cdot EZ} &:: \mathsf{\Gamma\Theta \cdot \Delta H : \Delta H \cdot EZ}\\ &:: \mathsf{\Gamma\Theta : EZ}\\ &:: \mathsf{\Gamma B : BE}.\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\mathsf{\Delta E \cdot ZH : EZ \cdot H\Delta :: \Gamma B : BE}.$$

Eğer $\mathsf{A\Delta}$ paraleli diğer tarafa da ilerletilmiş ise, ve $\mathsf{\Delta E}$ $\mathsf{\Delta}$'dan $\mathsf{\Gamma}$'nın ötesine sürdürülmüş ise, aynı şey [doğrudur]. □



Α
Δ
Η
Ζ
Ε
Γ
Β
Θ

Lemma XII (Önerme 138)

206. Bunlar şimdi kanıtlanmış olunca, eğer AB ve ΓΔ paralel ise, ve bunların üzerine bazı doğrular AΔ, AZ, BΓ, ve BZ düşerse, ve EΔ ve EΓ birleştirilirse, o zaman

H, M, ve K'dan geçen [çizgi'nin] doğru olduğu

gösterilecek.

Kanıt. Zira ΔAZ üçgen olduğundan, ve AE ΔZ'ya paralel olduğundan, ve ΔZ'ya Γ'da düşen EΓ sürdürülmüş olduğundan, önceden yazılmışlara göre

$$\mathsf{\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E}$$

meydana gelir. Yine ΓBZ üçgen olduğundan, ve ΓΔ'ya paralel olan BE ilerletilmiş olduğundan, ve ΓZΔ'ya Δ'da düşen ΔE sürdürülmüş olduğundan

$$\mathsf{\Gamma Z : Z\Delta :: \Delta E \cdot \Lambda K : \Delta K \cdot \Lambda E}$$

meydana gelir. Böylece tersine

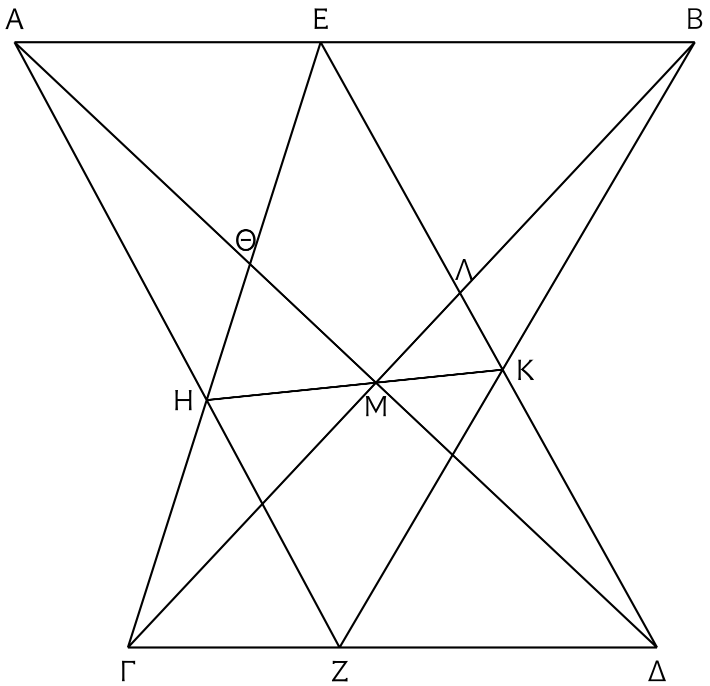
$$\mathsf{\Delta Z : Z\Gamma :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot \Lambda K}$$

meydana gelir.

$$\mathsf{\Delta Z : Z\Gamma :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E}$$

da oldu. Ve böylece

$$\mathsf{\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot \Lambda E : \Delta E \cdot K\Lambda.}$$



Dolayısıyla iki doğru ΕΓ ve ΕΔ, iki doğru ΓΜΛ ve ΔΜΘ'ya sürdürülmüş olduğundan, ve

$$\mathsf{\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot \Lambda K}$$

olduğundan, böylece

Η, Μ, ve Κ'dan [geçen çizgi] doğrudur;

zira bu gösterilmiş oldu. □

Lemma XIII (Önerme 139)

207. Ama o halde AB ve ΓΔ paralel olmasın, ama N'de kesişmiş olsun. O zaman yine

H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur.

Kanıt. Üç doğru AN, AZ, ve AΔ üzerine aynı Γ noktasından iki doğru ΓE ve ΓΔ sürdürülmüş olduğundan,

$$\mathsf{\Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H : \Theta E :: \Gamma N \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z}$$

meydana gelir. Yine aynı Δ noktasından, üç doğru BN, BΓ, ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan

$$\mathsf{N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta : Z\Gamma :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.}$$

Ama

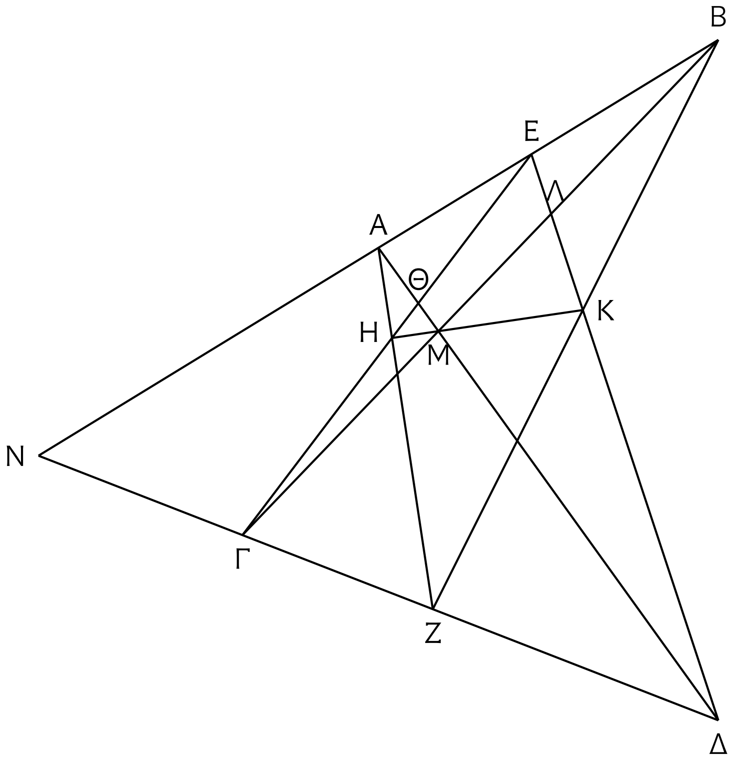
$$\mathsf{N\Gamma \cdot Z\Delta : N\Delta \cdot \Gamma Z :: \Gamma E \cdot H\Theta : \Gamma H \cdot \Theta E}$$

gösterilmiş oldu. Ve dolayısıyla

$$\mathsf{\Gamma E \cdot \Theta H : \Gamma H \cdot \Theta E :: \Delta K \cdot E\Lambda : \Delta E \cdot K\Lambda.}$$

O halde önceden yazılmışlara göre

H, M, ve K'dan geçen [çizgi] doğrudur. □


B
E
Λ
A
Θ
K
H
M
N
Γ
Z
Δ

Lemma XIV (Önerme 140)

208. AB $\mathsf{\Gamma\Delta}$'ya paralel olsun, ve AE ve $\mathsf{\Gamma B}$ sürdürülmüş olsun, ve [öyle] bir nokta BH'da Z [olsun] ki

$$\mathsf{\Delta E : E\Gamma :: \Gamma B \cdot HZ : ZB \cdot \Gamma H}$$

[olsun]. O zaman

A, Z, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt.

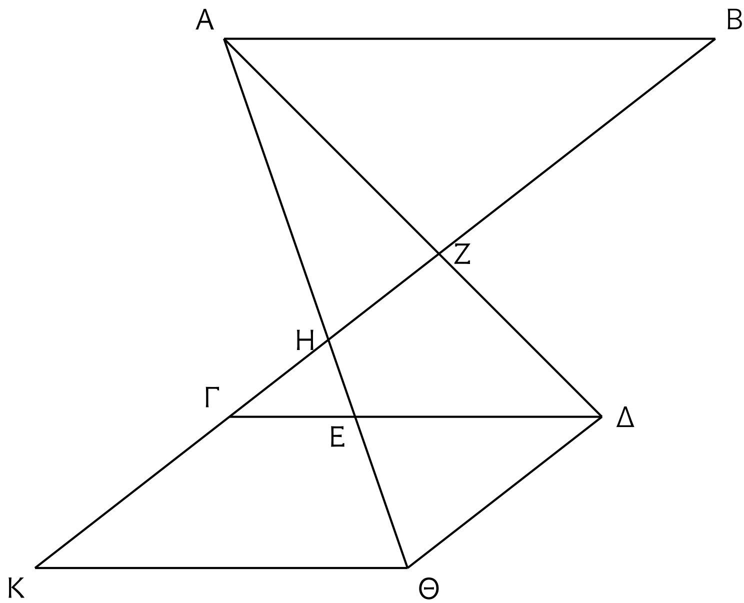
- Δ'dan ΒΓ'ya paralel olan ΔΘ ilerletilmiş olsun, ve ΑΕ Θ'ya uzatılmış olsun,
- Θ'dan ΓΔ'ya paralel olan ΘΚ [ilerletilmiş olsun], ve ΒΓ Κ'ya uzatılmış olsun.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathsf{\Delta E : E\Gamma} &\mathsf{:: \Gamma B \cdot ZH : ZB \cdot \Gamma H,} \\ \mathsf{\Delta E : E\Gamma} &\mathsf{:: \Delta\Theta : \Gamma H} \\ &\mathsf{:: \Delta\Theta \cdot BZ : \Gamma H \cdot BZ} \end{aligned}$$

olduğundan, böylece

$$\mathsf{B\Gamma \cdot ZH :: \Delta\Theta \cdot BZ.}$$



Böylece

$$\begin{aligned} \mathsf{\Gamma B} : \mathsf{BZ} &:: \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{HZ} \\ &:: \mathsf{\Gamma K} : \mathsf{HZ} \end{aligned}$$

orantı vardır. Böylece ayrıca

$$\begin{aligned} \mathsf{KB}\text{ tümü} : \mathsf{BH}\text{ tümü} &:: \mathsf{K\Gamma} : \mathsf{ZH} \\ &:: \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{ZH}. \end{aligned}$$

Ama paralellerden

$$\mathsf{KB} : \mathsf{BH} :: \begin{cases} \mathsf{\Theta A} : \mathsf{AH}, \\ \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{ZH}. \end{cases}$$

Ve ΔΘ ve ZH paraleldir. Böylece

A, Z, ve Δ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma XV (Önerme 141)

209. Bu önceden bakılmış olunca, ΑΒ ΓΔ'ya paralel olsun, ve bunların üzerine doğrular ΑΖ, ΖΒ, ΓΕ, ve ΕΔ düşmüş olsun, ve ΒΓ ve ΗΚ birleştirilmiş olsun. O zaman

Α, Μ, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. ΔΜ birleştirilmiş olsun ve Θ'ya uzatılmış olsun. Dolayısıyla ΒΓΖ üçgeninin Β tepe noktasından ΓΔ'ya paralel olan ΒΕ ilerletilmiş olduğundan ve ΔΕ sürdürülmüş olduğundan,

$$\mathsf{\Gamma Z} : \mathsf{Z\Delta} :: \mathsf{\Delta E} \cdot \mathsf{K\Lambda} : \mathsf{E\Lambda} \cdot \mathsf{K\Delta}$$

meydana gelir. Ayrıca

$$\mathsf{\Delta E} \cdot \mathsf{K\Lambda} : \mathsf{\Delta K} \cdot \mathsf{\Lambda E} :: \mathsf{\Gamma H} \cdot \mathsf{\Theta E} : \mathsf{\Gamma E} \cdot \mathsf{H\Theta}$$

(zira üç doğru ΓΛ, ΔΘ, ve ΗΚ üzerine aynı Ε noktasından iki doğru ΕΓ ve ΕΔ sürdürülmüştür). Böylece

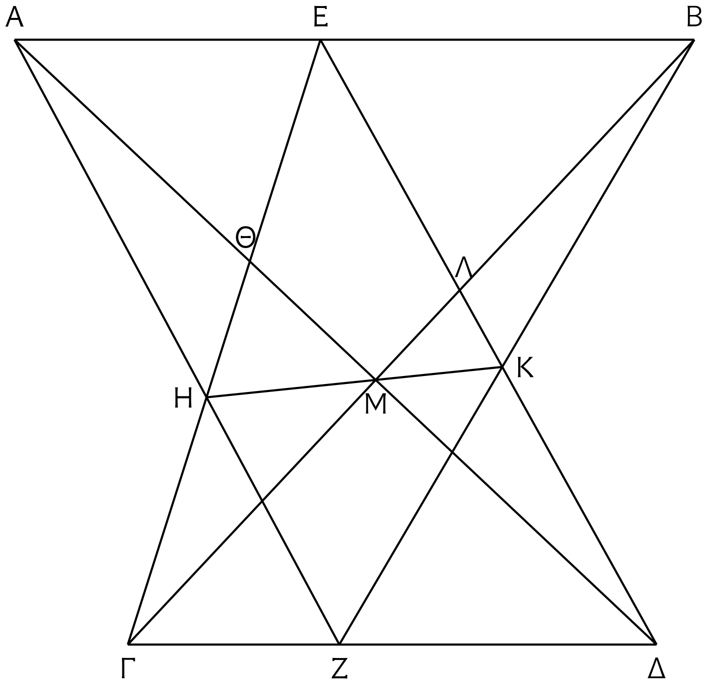
$$\mathsf{\Delta Z} : \mathsf{Z\Gamma} :: \mathsf{\Gamma E} \cdot \mathsf{H\Theta} : \mathsf{\Gamma H} \cdot \mathsf{\Theta E}.$$

Ayrıca

Θ, Μ, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece önceden yazılmıştan ayrıca

Α, Μ, ve Δ'dan [geçen çizgi] doğrudur. □


Α
Ε
Β
Θ
Λ
Κ
Η
Μ
Γ
Ζ
Δ

Lemma XVI (Önerme 142)

210. İki doğru AB ve $\mathsf{A\Gamma}$ üzerine aynı $\mathsf{\Delta}$ noktasından $\mathsf{\Delta B}$ ve $\mathsf{\Delta E}$ sürdürülmüş olsun, ve bunlarda H ve $\mathsf{\Theta}$ noktaları alınmış olsun, ve

$$\mathsf{EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta}$$

olsun. O zaman

A, H, ve $\mathsf{\Theta}$'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Kanıt. H'dan $\mathsf{B\Delta}$'ya paralel olan $\mathsf{K\Lambda}$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot ZH :: B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta}$$

olduğundan, ama

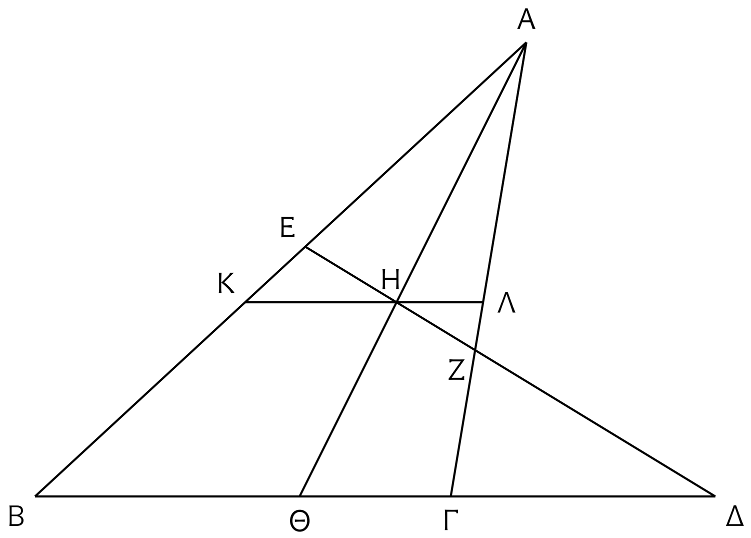
$$\begin{aligned}\mathsf{EH \cdot Z\Delta : \Delta E \cdot HZ} &:: \mathsf{(HE : E\Delta)(\Delta Z : ZH)}\\ &:: \mathsf{(KH : B\Delta)(\Gamma\Delta : H\Lambda)}\end{aligned}$$

olduğundan, ve ayrıca

$$\mathsf{B\Theta \cdot \Gamma\Delta : B\Delta \cdot \Gamma\Theta :: (\Theta B : B\Delta)(\Delta\Gamma : \Gamma\Theta)}$$

olduğundan, böylece

$$\mathsf{(KH : B\Delta)(\Gamma\Delta : H\Lambda) :: (B\Theta : B\Delta)(\Delta\Gamma : \Gamma\Theta).}$$



Ve

$$\mathsf{KH} : \mathsf{B\Delta} :: (\mathsf{KH} : \mathsf{B\Theta})(\mathsf{B\Theta} : \mathsf{B\Delta});$$

böylece

$$(\mathsf{KH} : \mathsf{B\Theta})(\mathsf{B\Theta} : \mathsf{B\Delta})(\mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{H\Lambda}) :: (\mathsf{B\Theta} : \mathsf{B\Delta})(\mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{\Gamma\Theta}).$$

Ortak $\mathsf{B\Theta} : \mathsf{B\Delta}$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$\begin{aligned}(\mathsf{KH} : \mathsf{B\Theta})(\mathsf{\Gamma\Delta} : \mathsf{H\Lambda}) &:: \mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{\Gamma\Theta} \\ &:: (\mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{H\Lambda})(\mathsf{H\Lambda} : \mathsf{\Theta\Gamma}).\end{aligned}$$

Ve yine ortak $\mathsf{\Delta\Gamma} : \mathsf{H\Lambda}$ oranı kovulmuş olsun. Böylece kalan

$$\mathsf{KH} : \mathsf{B\Theta} :: \mathsf{H\Lambda} : \mathsf{\Theta\Gamma}.$$

İzlemeyle

$$\mathsf{KH} : \mathsf{H\Lambda} :: \mathsf{B\Theta} : \mathsf{\Theta\Gamma},$$

ve $\mathsf{K\Lambda}$ ve $\mathsf{B\Gamma}$ paraleldir. Böylece

A, H, ve Θ noktalarından [geçen çizgi] doğrudur. □

Lemma XVII (Önerme 143)

211. Ama o halde AB ve ΓΔ paralel olmasın, ama N'de kesişmiş olsun.

Kanıt. Dolayısıyla aynı A noktasından üç doğru BN, BΓ, ve BZ üzerine iki doğru ΔE ve ΔN sürdürülmüş olduğundan,

$$\mathsf{N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot \Delta Z :: \Delta E \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta}.$$

Ve

$$\mathsf{E\Delta \cdot K\Lambda : E\Lambda \cdot K\Delta :: E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H}$$

(zira yine üç doğru ΓΛ, ΔΘ, ve HK üzerine aynı E noktasından sürdürülmüştür iki doğru EΓ ve EΔ). Ayrıca

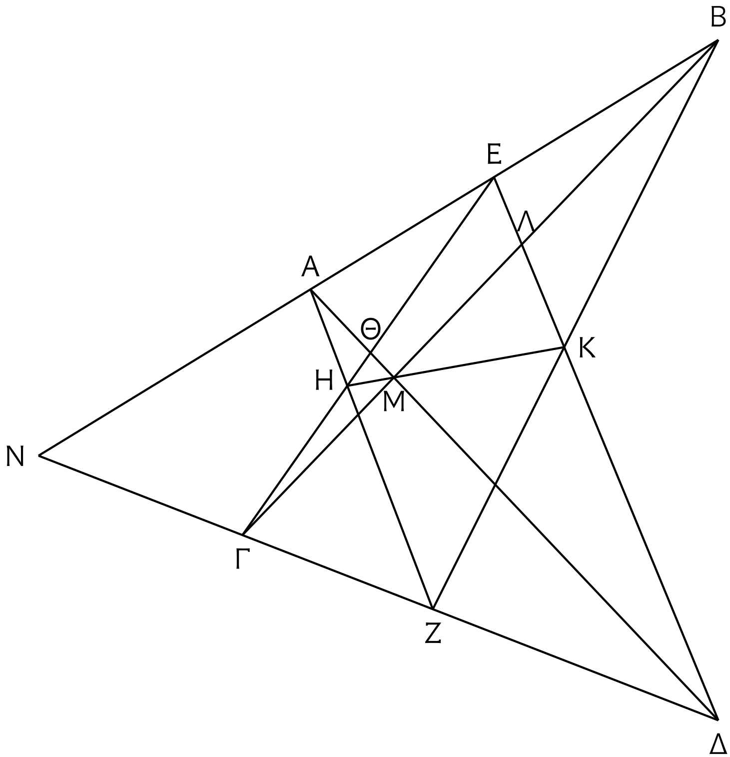
$$\mathsf{E\Theta \cdot \Gamma H : E\Gamma \cdot \Theta H :: N\Delta \cdot \Gamma Z : N\Gamma \cdot Z\Delta}.$$

O halde önceden yazılmıştan

A, Θ, ve Λ'dan [geçen çizgi] doğrudur.

Böylece

A, M, ve Λ'dan [geçen çizgi] doğrudur. □


B
E
Λ
A
Θ
K
H
M
N
Γ
Z
Δ

Lemma XVIII (Önerme 144)

212. Üçgen ΑΒΓ [olsun], ve ΒΓ'ya paralel olan ΑΔ ilerletilmiş olsun, ve ΔΕ ve ΖΗ sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$\mathsf{EB}^2 : \mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} :: \mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma}$$

olsun (ἔστω δὲ ως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓΒ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ). O zaman ΒΔ birleştirilirse,

Θ, Κ, Γ'dan [geçen çizgi] doğru olur.

Kanıt. $\mathsf{EB}^2 : \mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} :: \mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma}$ olduğundan, $\mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma}$ ile aynı olan ortak ΓΕ:ΕΒ oranı eklenmiş olsun. Böylece eşitlikten

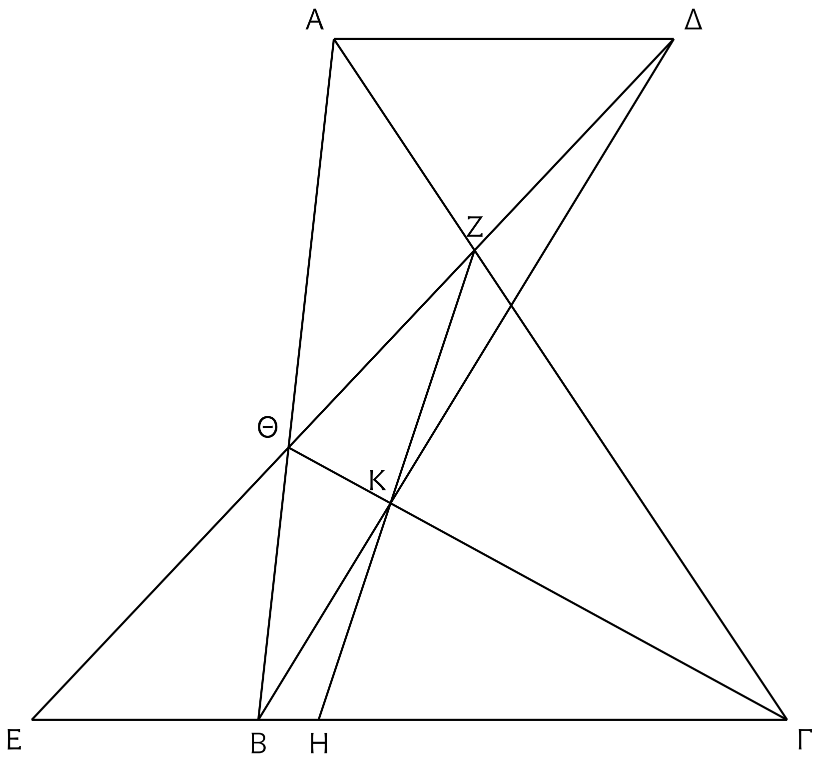
$$\left.\begin{array}{c} \mathsf{EB}^2 : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma} \\ \mathsf{EB} : \mathsf{B\Gamma} \end{array}\right\} :: (\mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma})(\underbrace{\mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{\Gamma B} : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma}}_{\mathsf{E\Gamma} : \mathsf{EB}}).$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} \mathsf{EB}^2 : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{B\Gamma} &:: (\mathsf{BH} : \mathsf{H\Gamma})(\mathsf{E\Gamma} : \mathsf{EB}) \\ &:: \mathsf{E\Gamma} \cdot \mathsf{BH} : \mathsf{EB} \cdot \mathsf{\Gamma H}. \end{aligned}$$

Önceden yazılmış lemmadan

$$\mathsf{EB} : \mathsf{B\Gamma} :: \mathsf{\Delta Z} \cdot \mathsf{\Theta E} : \mathsf{\Delta E} \cdot \mathsf{Z\Theta},$$



ve böylece

$$\Gamma E \cdot BH : \Gamma H \cdot EB :: \Delta Z \cdot \Theta E : \Delta E \cdot Z\Theta.$$

Böylece

Θ, Κ, ve Γ'dan [geçen çizgi] doğrudur,

zira bu, [Lemma X'un] karşıt tersinin durumlarındadır. □

Lemma XIX (Önerme 145)

213. Üç doğru AB, $\mathsf{A\Gamma}$, $\mathsf{A\Delta}$ üzerine bir E noktasından iki doğru EZ ve EB sürdürülmüş olsun. Ayrıca

$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{\Theta E} : \mathsf{\Theta H}$$

olsun. O zaman

$$\mathsf{BE} : \mathsf{B\Gamma} :: \mathsf{E\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma}$$

meydana gelir.

Kanıt. H'dan BE'a paralel olan $\mathsf{\Lambda K}$ ilerletilmiş olsun. Dolayısıyla

$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta H}$$

olduğundan, ama

$$\mathsf{EZ} : \mathsf{ZH} :: \mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta H},$$
$$\mathsf{E\Theta} : \mathsf{\Theta H} :: \mathsf{\Delta E} : \mathsf{H\Lambda}$$

olduğundan, böylece ayrıca

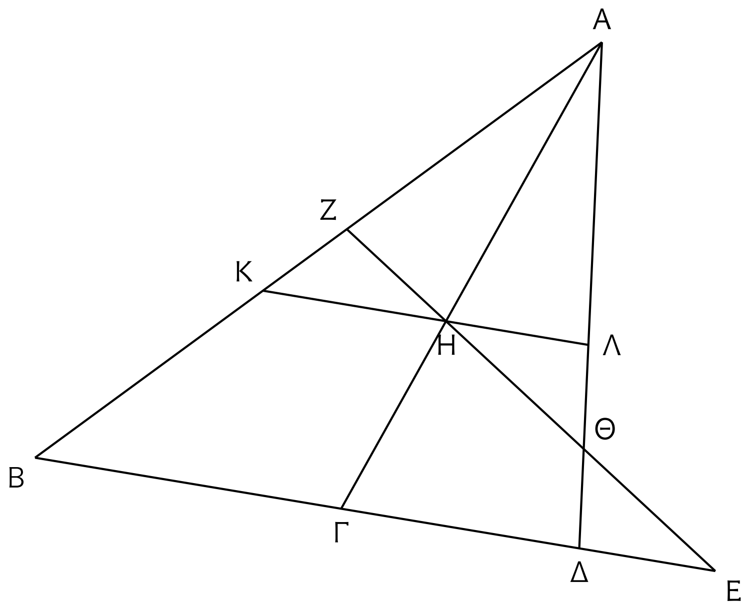
$$\mathsf{BE} : \mathsf{HK} :: \mathsf{\Delta E} : \mathsf{H\Lambda}.$$

İzlemeyle

$$\mathsf{EB} : \mathsf{E\Delta} :: \mathsf{KH} : \mathsf{H\Lambda}.$$

Ve

$$\mathsf{KH} : \mathsf{H\Lambda} :: \mathsf{B\Gamma} : \mathsf{\Gamma\Delta}.$$



Böylece ayrıca

$$\mathsf{BE} : \mathsf{E\Delta} :: \mathsf{B\Gamma} : \mathsf{\Gamma\Delta}.$$

İzlemeyle

$$\mathsf{EB} : \mathsf{B\Gamma} :: \mathsf{E\Delta} : \mathsf{\Delta\Gamma}. \qquad \square$$

[Diğer] durumlar da benzerdir.

Ek

Fiiller Sözlüğü

ἄγω ilerle= (örneğin Lemma I'de: **Ἤχθω** διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΖΛ, "Z'dan BΔ'ya paralel olan ΖΛ *ilerletilmiş olsun*")

ἀγάγω (sadece Lemma IV'te: Ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΘΓ παράλληλον **ἀγάγω** τὴν ΕΞ, "Eğer E'dan ΘΓ'ya paralel olan ΕΞ *ilerlersem*")

διάγω sürdür= (örneğin Lemma III'te: Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΑ ΔΑ **διήχθωσαν** δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΕ ΘΔ, "Üç doğru AB, ΓΑ, ve ΔΑ üzerine iki doğru ΘΕ ve ΘΔ *sürdürülmüş olsun*")

ἁιρέω

ἀφαιρέω ayır= (Lemma VIII)

βάλλω

ἐκβάλλω uzat=

μεταβάλλω değiştir=

γιγνόμαι ol= (doğ=, meydana gel=)

γράφω

προγράφω önceden yaz=

δείκνυμι göster=

ἀποδείκνυμι kanıtla= (Lemma XII)

εἰμι ol=

ἐρῶ söyle= (λέγω'nun gelecek zamanı olarak kullanılır. Lemma VI'da sadece: ἑκατέρων γὰρ τῶν **εἰρημένων** ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΘΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος, "zira *söylen-*

miş [iki oranın] her biri, ΘΗ : ΗΕ oranıyla aynıdır")

ἔχω -i ol=

ζεύγνυμι birleştir=

  ἐπιζεύγνυμι birleştir=

θεωρέω

  προθεωρέω önceden bak= (Sadece Lemma XV'te: Τούτου προτεθεωρημένου [*genitivus absolutus*], "Bu önceden bakılmış olunca")

κεῖμαι otur=

  προσκεῖμαι eklen=

  ὑποκεῖμαι varsayıl=

κλάω eğ= (Lemma IX: **κεκλάσθω** ἡ ΖΘΗ, "ΖΘΗ *eğilmiş olsun*")

κρούω

  ἐκκρούω kov=

λαμβάνω al= (Lemma XVI'da: ἐπ' αὐτῶν **εἰλήφθω** σημεῖα τὰ Η Θ, "bunlarda Η ve Θ noktaları *alınmış olsun*")

πίπτω

  ἐμπίπτω üzerine düş=

  συμπίπτω kesiş= (her zaman **συμπιπτέτω** [tekil] veya **συμπιπτέτωσαν** [çoğul], "*kesişmiş olsun*")

τίθημι koy= (Lemma VI: ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΒ **θῶ** τῇ ΗΒ ἴσην τὴν ΒΘ, "zira eğer ΕΒ'da ΗΒ'ya eşit olan ΒΘ'yı *koyarsam*")

τυγχάνω rastla= (**τυχόν**, "rasgele": aşağıya bakın)

Edatlar Sözlüğü

ἀλλά ama

ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ τῶν ... ... · ... da başka rasgele bir [çarpımdır] (örneğin Lemma III'e bakın)

ἄρα böylece

διὰ ταὐτά aynı [sebep]le

γάρ zira

[*genitivus absolutus*] -ince

δέ de, ve

δή o halde

ἐπεί -diğinden

καί de, dahi, ve, ayrıca—örneğin Lemma I'de:

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΛ,
οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ,
καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ,

$$\text{Böylece paralellerden } \mathsf{EB} : \mathsf{B\Lambda} :: \begin{cases} \mathsf{EK} : \mathsf{KZ}, \\ \mathsf{\Delta\Theta} : \mathsf{ZH}. \end{cases}$$

κατὰ τὰ αὐτά aynı [şekil]de

μέν. . . δέ •. . . •. . . de

οὖν dolayısıyla

πάλιν yine

τουτέστιν yani—örneğin Lemma I'de:

ἐστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΖ,
τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΛ,
οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ,

$$\underbrace{\mathsf{\Delta A : AZ}}_{\mathsf{BA : A\Lambda}} :: \mathsf{\Gamma A : AH},$$

ve Lemma III'te:

ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖ ΘΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ,
τουτέστιν ἡ ΘΜ πρὸς ΘΗ,
τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ,

$$\begin{aligned} \mathsf{E\Theta \cdot HZ : EZ \cdot H\Theta} &:: \mathsf{EZ \cdot \Theta M : EZ \cdot H\Theta} \\ &:: \mathsf{\Theta M : \Theta H} \\ &:: \mathsf{\Lambda\Theta : \Theta K}. \end{aligned}$$

ὥστε öyleyse

Yunan Alfabesi

Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon ("çıplak e")
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	θ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mü
Ν	ν	nü
Ξ	ξ	ksi
Ο	ο	omikron ("küçük o")
Π	π	pi
Ρ	ρ	ro (*rho*)
Σ	σ, ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	üpsilon
Φ	φ	fi (*phi*)
Χ	χ	hi (*khi, chi*)
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega ("büyük o")

Harfler, Yunan Font Derneği'nin "NeoHellenic" fontundan alınır. Bu font

δ = ẟ,   Ε = Є,   ζ = ʒ,   Ξ = Ξ = Ɪ,   Ω = Ѡ

alternatif biçimlerini sağlar. Sigmanın küçük ς biçimi sadece bir sözcüğün sonunda kullanılır.

Kaynakça

[1] Archimedes. *The Two Books* On the Sphere and the Cylinder, volume I of *The Works of Archimedes.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Translated into English, together with Eutocius' commentaries, with commentary, and critical edition of the diagrams, by Reviel Netz.

[2] Mustafa Kemal Atatürk. *Geometri.* Türk Dil Kurumu, Ankara, 2000. 4. baskı. 1. baskı 1971.

[3] Güler Çelgin. *Eski Yunanca–Türkçe Sözlük.* Kabalcı, İstanbul, 2011.

[4] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü.* Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[5] Euclid. *The Thirteen Books of Euclid's* Elements. Dover Publications, New York, 1956. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary by Thomas L. Heath. In three volumes. Republication of the second edition of 1925. First edition 1908.

[6] Euclid. *Öklid'in* Öğeler*'inin 13 Kitabından Birinci Kitap.* Mathematics Department, Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, 4th edition, September 2014. The first of the 13 books of Euclid's Elements. Greek text, with Turkish version by Özer Öztürk & David Pierce.

[7] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid.* Dover Publications Inc., New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.

[8] Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Diophantus*. Dover Publications Inc., New York, 1981. Corrected reprint of the 1921 original.

[9] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York, 1972.

[10] Henry George Liddell and Robert Scott. *A Greek-English Lexicon*. Clarendon Press, Oxford, 1996. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones, with the assistance of Roderick McKenzie and with the cooperation of many scholars. With a revised supplement.

[11] James Morwood and John Taylor, editors. *Pocket Oxford Classical Greek Dictionary*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[12] Pappus of Alexandria. *Pappus Alexandrini Collectionis Quae Supersunt*, volume II. Weidmann, Berlin, 1877. E libris manu scriptis edidit, Latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.

[13] Pappus of Alexandria. *Book 7 of the Collection. Part 1. Introduction, Text, and Translation*. Springer Science+Business Media, New York, 1986. Edited With Translation and Commentary by Alexander Jones.

[14] Proclus. *A Commentary on the First Book of Euclid's* Elements. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Translated from the Greek and with an introduction and notes by Glenn R. Morrow. Reprint of the 1970 edition. With a foreword by Ian Mueller.

[15] David Eugene Smith. *A Source Book in Mathematics*. 2 vols. Dover Publications Inc., New York, 1959. Unabridged republication of the first edition, 1929, published by McGraw-Hill.

[16] Herbert Weir Smyth. *Greek Grammar*. Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1980. Revised by Gordon M. Messing, 1956. Eleventh Printing. Original edition, 1920.

[17] D. J. Struik, editor. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986. Reprint of the 1969 edition.

[18] Rene Taton. L' « Essay pour les Coniques » de Pascal. *Revue d'histoire de science et de leurs applications*, 8(1):1–18, 1955. `www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0048-7996_1955_num_8_1_3488`.

[19] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. I. From Thales to Euclid.* Number 335 in the Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951. With an English translation by the editor.

[20] Ivor Thomas, editor. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics. Vol. II. From Aristarchus to Pappus.* Number 362 in the Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1951. With an English translation by the editor.

[21] Arthur W. Weeks and Jackson B. Adkins. *A Course in Geometry: Plane and Solid.* Ginn and Company, Lexington, Massachusetts, 1970.

yazar	eserinin adı	Yunancası	İngilizcesi	*
Öklid	*Veriler*	Δεδώμενα	*Data*	1
Apollonius	*Oranın Kesilmesi*	Λόγου ἀποτομή	*Cutting-off of a Ratio*	2
Apollonius	*Alanın Kesilmesi*	Χωρίου ἀποτομή	*Cutting-off of an Area*	2
Apollonius	*Belirli Kesit*	Διωρισμένης τομή	*Determinate Section*	2
Apollonius	*Teğetler*	Ἐπαφαί	*Tangencies*	2
Öklid	*Porizmalar*	Πορίσματα	*Porisms*	3
Apollonius	*Yönelmeler*	Νεύσεις	*Vergings*	2
Apollonius	*Düzlem Yerleri*	Τόποι ἐπιπέδοι	*Plane Loci*	2
Apollonius	*Koni Kesitleri*	Κωνικαί	*Conics*	8
Aristaeus	*Cisim Yerleri*	Τόποι στερεοί	*Solid Loci*	5
Öklid	*Yüz Yerleri*	Τόποι τῶν πρὸς ἐπιφανείᾳ	*Surface Loci*	2
Eratosthenes	*Ortalar hakkında*	Περὶ μεσοτήται	*On Means*	2

Analiz Hazinesi'nin içindekiler. (*Eserin kitap [cilt] sayısı)