MAT 438
Grupların Gösteriliş Teorisine Giriş

Mustafa Topkara

İçindekiler

Açıklamalar

- Bu ders notları MSGSÜ 2019-20 Bahar Dönemi MAT 438 “Grupların Gösteriliş Teorisine Giriş” dersi için hazırlandı.
- Notlar, G. James ve M. Liebeck’in ***“Representations and Characters of Groups”*** kitabını takip eder.
- Bu notlarda “uzay” dediğimizde “vektör uzayı”nı kastedeceğiz.
- Bu notlarda “kitap” dediğimizde G. James ve M. Liebeck’in *”Representations and Characters of Groups”* kitabını kastedeceğiz.
- Vektörlerin gerdiği altuzayı ‘sp’ ile göstereceğiz. Örneğin: $\mathrm{sp}(v_1, v_2)$

Bölüm 1

Grup Temsilleri

1.1 Temsiller

Gruplar oldukça soyut matematiksel nesnelerdir. Grupları daha somut olarak görebilmenin yaygın bir yolu, grup elemanlarını bir kümeye etki ettirmek ve bu etkiyi incelemektir. *Grup temsili* denilen şeyi de, göreceksiniz ki temelde verilen bir grubu, her bir elemanını bir fonksiyon aracılığıyla 'uygun' bir şekilde bir vektör uzayı üzerinde etki ettirmek olarak tanımlayacağız.

Bu 'uygun'luğu biraz daha tartışalım: Öncelikle, bir vektör uzayı üzerindeki 'uygun' fonksiyonlar doğrusal dönüşümlerdir; demek ki her bir grup elemanını bir doğrusal dönüşüm ile ilişkilendirebiliriz. Ayrıca, bu ilişkilendirme grup işlemi ve özellikleri (birim eleman, ters) eleman ile de uyumlu olmalı.

Vektör uzayının bir tabanı seçildiğinde bu vektör uzayı üzerindeki doğrusal dönüşümler, kare matrislere karşılık gelir. Yani, grubun her bir elemanını bir doğrusal dönüşümle ilişkilendirmek yerine 'uygun' bir matrisle ilişkilendirmeyi de düşünebiliriz. Bu matrisler, tersinir grup elemanlarına karşılık geleceğinden kendileri de tersinir olmalı: başka bir deyişle determinantları sıfırdan farklı olmalı.

Tercihe göre matrislerin girdilerini gerçel sayılardan veya karmaşık sayılardan alabiliriz. [1] F ile, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'yi gösterelim. Girdileri F'den olan $n \times n$ boyutlu matrisleri $GL(n, F)$ şeklinde göstereceğiz. $GL(n, F)$'nin matris çarpmasına göre bir grup oluşturduğuna dikkat edin!

Tanım 1.1. G bir grup olsun. G grubundan $GL(n, F)$ grubuna

$$\begin{aligned} \rho : G &\to GL(n, F) \\ g &\mapsto g\rho \end{aligned}$$

şeklinde bir homomorfizme, G grubunun bir *temsili* (veya *gösterilişi*), n sayısına da bu temsilin *derecesi* denir.

Örnek 1.1. G grubunu $D_8 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ dihedral grubu olarak seçelim, $\rho : D_8 \to GL(2, F)$ grup temsilini de bu grubun üreteçleri üzerinden

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

olmak üzere

$$a\rho = A, \ b\rho = B$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu elemanlar grup sunumundaki bağıntıları, yani

$$A^4 = B^2 = I_2 \ , \ B^{-1}AB = A^{-1}$$

koşullarını sağladığından gerçekten de bu şekilde bir homomorfizm tanımlanabileceğini görüyoruz. Grup temsili ile her bir grup elemanının eşleştiği matris aşağıdaki tabloda veriliyor:

g	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$g\rho$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

[1] Bu seçim, aslında vektör uzayının hangi cisim üzerine tanımlı olduğu ile ilgilidir. Başka cisimler üzerine temsil kuramı düşünmek de mümkün olmakla birlikte, bu ders için sadece gerçel ve karmaşık sayılar cisimleri ile ilgileneceğiz.

1.2 Temsil denkliği

Elimizde bir $\rho : G \to GL(n,F)$ grup temsili olsun. Herhangi bir$n \times n$ boyutlu $T \in GL(n,F)$ tersinir matrisi için

$$\begin{aligned} \sigma : G &\to GL(n,F) \\ g &\mapsto T^{-1} g\rho T \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Başka bir deyişle, σ altında $g \in G$ elemanının görüntüsü, $g\rho$ matrisinin T ile eşleniği olsun. Bu durumda, herhangi $g, h \in G$ için

$$\begin{aligned} (gh)\sigma &= T^{-1}(gh)\rho T \\ &= T^{-1}(g\rho)(h\rho) T \\ &= T^{-1}(g\rho)T T^{-1}(h\rho) T \\ &= (g\sigma)(h\sigma) \end{aligned}$$

olduğunu görüyoruz, yani bu $sigma$ fonksiyonu da G grubunun n dereceli bir temsili oluyor. Kare matrisler üzerinde eşlenik alma işleminin taban değiştirmeye karşılık geldiğini hatırlayalım. Bu bakışla ρ ve ondan eşlenik ile elde edilen σ temsillerinin çok da farklı olmadıklarını, bir taban değiştirme işlemi dışında 'benzer' olduklarını söyleyebiliriz. Bu bakışa dayanarak aşağıdaki tanımı yapacağız.

Tanım 1.2. Bir G grubu için n dereceli $\rho : G \to GL(n,F)$ ve $\sigma : G \to GL(n,F)$ temsilleri verilsin. Eğer her $g \in G$ için

$$g\sigma = T^{-1}\rho T$$

sağlanacak şekilde bir $T \in GL(n,F)$ matrisi varsa, ρ ve σ temsilleri *denktir* diyeceğiz.

Bu denkliğin gerçekten de bir denklik bağıntısı verdiğini ispatlamayı egzersiz olarak bırakıyoruz.

1.3 Temsillerin çekirdekleri

Bir grup temsili aslında bir grup homomorfizmi olduğundan, bir temsilin çekirdeğinden (kernelinden) bahsedebiliriz. Daha açık bir şekilde, bir $\rho : G \to GL(n, F)$ grup temsilinin *çekirdeği* (ya da, *kerneli*), I_n ile $n \times n$ boyutlu birim matris gösterilmek üzere G'nin

$$\operatorname{Ker} \rho = \{g \in G : g\rho = I\}$$

şeklindeki altgrubudur.

Bir G grubunun, her $g \in G$ için $g\rho = [1]$ şeklinde tanımlanan $\rho : G \to GL(1, F)$ temsiline bu grubun *aşikar temsili* diyeceğiz. Aşikar temsil için $\operatorname{Ker} \rho = G$ olduğunu gözlemleyelim. Aşikar temsiller her grup elemanını aynı matrise gönderirler, yani birebirliğe mümkün olduğu kadar uzaktırlar. Tam tersi özellik gösteren temsilleri şu şekilde isimlendireceğiz:

Tanım 1.3. Eğer bir ρ temsili için $\operatorname{Ker} \rho = \langle 1 \rangle$ ise (başka bir deyişle, eğer ρ birebir ise) ρ temsili bir *sadık temsildir* denir.

Önerme 1.4. *Bir $\rho : G \to GL(n, F)$ temsili sadıktır ancak ve ancak görüntüsü (yani* $\operatorname{Im} \rho$*) ile G grubu izomorfik ise.*

Kanıt. Egzersiz. □

Bölüm 2

FG-modülleri

Elimizde n dereceli bir $\rho : G \to GL(n, F)$ temsili olsun. $V = F^n$ vektör uzayını düşünelim, ve bu uzayın n terimli her bir sıralısını bir satır matrisi olarak düşünelim, yani bizim için

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{array} \right]$$

olsun. Bu durumda her $A \in GL(n, F)$ matrisinin

$$\begin{aligned} V &\to V \\ v &\mapsto vA \end{aligned}$$

şeklinde bir doğrusal dönüşüm belirlediğini görebiliriz. Dolayısıyla her bir $g \in G$ grup elemanı bu şekilde $g\rho$ tarafından belirlenen ve

$$v \mapsto v(g\rho)$$

şeklinde çalışan tersinir bir $V \to V$ doğrusal dönüşümü verir. Bir bakıma; her bir grup elemanı, bu tarif edilen şekilde V'deki her bir vektör üzerinde 'etkir'. Bu tür bir etkiyi soyutlayarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız:

Tanım 2.1. G bir grup, V ise F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\begin{aligned} V \times G &\to V \\ (v, g) &\mapsto vg \end{aligned}$$

biçiminde gösterilen bir işlem, her $u, v \in V, \lambda \in F$ ve $g, h \in G$ için

i. $v(gh) = (vg)h$

ii. $v1 = v$

iii. $(\lambda v)g = \lambda(vg)$

iv. $(u + v)g = ug + uv$

koşullarını sağlıyorsa, bu işlemle birlikte V vektör uzayına bir FG-modülü denir.

Notasyon. V bir FG-modülü, $\mathcal{B}$ ise V'nin bir tabanı olmak üzere her bir $g \in G$ için $v \mapsto vg$ doğrusal dönüşümüne $\mathcal{B}$ tabanında karşılık gelen matrisi $[g]_{\mathcal{B}}$ şeklinde göstereceğiz.

Sıradaki iki teorem, grup temsilleri ve FG-modülleri arasında iki yönlü bir ilişki olduğunu gösteriyor:

Teorem 2.2. *G grubunun bir gösterimi $\rho : G \to GL(n, F)$ olsun. Bu durumda $V = F^n$ vektör uzayı,*

$$\begin{aligned} V \times G &\to V \\ (v, g) &\mapsto v(g\rho) \end{aligned}$$

işlemine göre bir FG-modül olur. Ayrıca, öyle bir $\mathcal{B}$ tabanı vardır ki bu FG-modülü için

$$g\rho = [g]_{\mathcal{B}}$$

sağlanır.

Teorem 2.3. *V bir FG-modülü, $\mathcal{B}$ ise V'nin bir tabanı olsun. Bu durumda*

$$g\rho := [g]_{\mathcal{B}}$$

şeklinde tanımlı $\rho : G \to GL(n, F)$ fonksiyonu bir grup temsilidir.

Bu iki teoremi birlikte bize; bir grup temsili seçiminin, bir FG-modül ve bir taban seçmeye karşılık geldiğini söylüyor. Bu teoremlerin ispatlarını egzersiz olarak bırakıyoruz.

Bölüm 3

FG-altmodülleri ve İndirgenebilirlik

3.1 FG-altmodülleri

Diğer cebirsel yapılar (grup, halka, vektör uzayı vs.) gibi, FG-modüllerinin de *altyapıları* tanımlanabilir. Her nasıl bir grubun, aynı işlem ile düşünüldüğünde grup olarak kalan altkümesine altgrup diyorsak, burada da verilen bir FG-modülün ilgili işlemlere (yani skaler çarpma, vektör toplaması ve grup etkisine) göre yine modül olarak kalan altkümesine bir FG-altmodülü diyeceğiz. Bunun için, işlemlere (yani vektör uzayı işlemlerine ve grup etkisine) göre kapalılık yeterli olacak.

Vektör uzayı işlemlerine göre kapalılığı, verilen altkümenin vektör altuzayı olması garanti edecek, grup etkisine göre kapalılığı ise tanımda ayrıca belirteceğiz:

Tanım 3.1. V bir FG-modülü olsun. Bir $W \subseteq V$ kümesi eğer

- V vektör uzayının altuzayı ise ve
- her $g \in G, w \in W$ için $gw \in W$ ise

W, V'nin bir *FG-altmodülüdür* denir.

Sadece 0 'dan oluşan altküme ve V 'nin kendisi, V 'nin FG-altmodülleridir.

Örnek 3.1. $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$ ile 3 elemanlı devirli grup verilsin. Ayrıca $V = \mathbb{R}^3$ bildiğimiz üç boyutlu gerçel vektör uzayı yapısıyla verilsin. V uzayının v_1, v_2, v_3 vektörlerinden oluşan bir $\mathcal{B}$ tabanını düşünelim (isterseniz standart tabanı hayal edebilirsiniz). V üzerinde bir FG-modülü yapısı, a'nın bu taban üzerinde nasıl etki ettiği tarif edilerek verilebilir:

$$av_1 = v_2, \; av_2 = v_3, \; av_3 = v_1.$$

Soru 1. Bu tarif neden yeterlidir? Grubun vektör uzayı üzerindeki etkisini tanımlamak için, her $g \in G$ ve her $v \in V$ için gv tanımlanmalı iken biz sadece tek grup elemanının, sadece üç vektöre etkisini vermenin yeterli olduğunu iddia ettik. Nasıl? Örneğin

$$a^2(2v_1 - v_3) =?$$

Soru 2. Bu tarif neden bir grup etkisi verir? Diğer grup elemanları ve vektörler için etki tanımlandığında, FG-modülü aksiyomlarının sağlanacağını nereden biliyoruz?

Bu uzayın $w = v_1 + v_2 + v_3$ vektörü tarafından gerilen altuzayına W diyelim:

$$W = \mathrm{sp}(w).$$

Bu altuzay, aynı zamanda V 'nin bir FG-altmodülüdür:

$$\begin{aligned} aw &= av_1 + av_2 + av_3 \\ &= v_2 + v_3 + v_1 \in W. \end{aligned}$$

Soru 3. Bu hesap neden yeterli oldu? Neden diğer grup elemanları ve diğer vektörler için grup etkisi şartını kontrol etmemiz şart değil?

Şimdi ise V 'nin bir diğer altuzayını düşünelim: $\mathrm{sp}(v_1 + v_2)$. Bu altuzay bir FG-altmodülü değildir çünkü:

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2 = v_2 + v_3 \notin \mathrm{sp}(v_1 + v_2).$$

3.2 İndirgenemez FG-modülleri

Şimdi indirgenemez FG-modülünü ve onun yardımıyla indirgenemez grup temsilini tanımlayacağız. Bir $\rho : G \to GL(n, F)$ grup temsili verildiğinde $V = F^n$ üzerinde bir FG-modülü yapısı elde ettiğimizi önceki bölümden hatırlayalım.

Tanım 3.2. V bir FG-modülü olsun. Eğer V 'nin aşikar olmayan (yani kendisi ve $< 0 >$ altmodülü dışında) altmodülü yoksa, V bir *indirgenemez* FG-*modülüdür* denir.

Benzeri şekilde, eğer bir $\rho : G \to GL(n, F)$ temsiline karşılık gelen FG-modülü yapısı indirgenemez ise, bu grup temsili *indirgenemezdir* denir.

İndirgenemez olmayan bir FG-modüle ya da temsile ise *indirgenebilir* diyoruz.

Şimdi elimizde V adında bir indirgenebilir FG-modülü olduğunu düşünelim, yani V 'nin aşikar olmayan W adında bir FG-altmodülü olsun. W 'nun bir tabanını $\mathcal{B}_1$ ile belirtelim ve bu tabanı V 'nin bir tabanı olan $\mathcal{B}$ 'ye genişletelim (lineer cebirden, bir vektör uzayındaki herhangi bir lineer bağımsız vektör kümesini bir tabana genişletebileceğinizi hatırlayın).

$\dim V = n$ ve $\dim W = k$ olsun. Herhangi bir $g \in G$ grup elemanı için $[g]_{\mathcal{B}}$ matrisi

$$[g]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} X_g & Y_g \\ \hline \mathbf{0} & Z_g \end{array}\right]$$

blok formuna sahiptir (yani, X_g, Y_g, Z_g sırasıyla $k \times k, k \times (n-k), (n-k) \times (n-k)$ boyutlarında birer matris belirtir, $\mathbf{0}$ ile ise $(n-k) \times k$ boyutlarındaki sıfır matrisi belirtilmektedir).

Bu durumda $\rho_1 : G \to GL(k, F)$ ve $\rho_2 : G \to GL(n-k, F)$ grup etkilerini yukarıdaki blok form gösterimindeki altmatrisler aracılığıyla

$$\begin{aligned}\rho_1(g) &= X_g \\ \rho_2(g) &= Z_g\end{aligned}$$

olarak tanımlayabiliriz.

Soru 4. Bu fonksiyonlar neden birer temsildir?

Örnek 3.2. Bir önceki, yani Örnek 3.1 'deki FG-modülü inceleyelim. Orada, $W = \mathrm{sp}(v_1 + v_2 + v_3)$ altuzayının bir FG-altmodülü olduğunu, dolayısıyla V 'nin indirgenebilir olduğunu görmüştük. Burada $v_1 + v_2 + v_3$ vektörünün, tek başına bir boyutlu W uzayının bir tabanını oluşturduğunu görüyoruz. Bu tabanı, V 'nin $\mathcal{B}$ ile göstereceğimiz şu vektörlerden oluşan bir tabanına genişletelim:

$$\mathcal{B} : v_1 + v_2 + v_3 \ , \ v_2 \ , \ v_3.$$

Bu durumda $[a]_{\mathcal{B}}$ matrisini şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}a(v_1 + v_2 + v_3) &= v_1 + v_2 + v_3 \\ av_2 &= v_3 \\ av_3 &= v_1\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}a(v_1 + v_2 + v_3) &= 1(v_1 + v_2 + v_3) + 0v_2 + 0v_3 \\ av_2 &= 0(v_1 + v_2 + v_3) + 0v_2 + 1v_3 \\ av_3 &= 1(v_1 + v_2 + v_3) - 1v_2 - 1v_3.\end{aligned}$$

Sonuç olarak;

$$[a]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

matrisini buluyoruz.

Soru 5. Bu matris gösteriminde, yukarıda anlatılan X_a, Y_a ve Z_a matrisleriniz gözlemleyin.

Soru 6. $[1]_{\mathcal{B}}$ matrisi nedir? $[a^2]_{\mathcal{B}}$ matrisini,

- doğrudan, yukarıdakine benzer hesapla
- $[a]_{\mathcal{B}}$ matrisi kullanarak

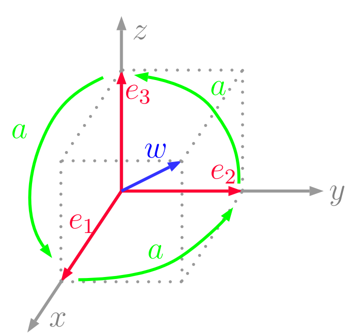
hesaplayın.

Örnek 3.3. Bu sefer Örnek 3.1 'i geometrik olarak anlamak için özel bir durumunu, $V = \mathbb{R}^3$ uzayında $\mathcal{B}$ tabanını standart taban seçerek inceleyelim. Yani

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 = (1,0,0) \\ v_2 &= e_2 = (0,1,0) \\ v_3 &= e_3 = (0,0,1) \end{aligned}$$

oldarak alalım.

Bu durumda $a \in C_3$ elemanının etkisinin, bu üç vektörü şekildeki gibi birbirine gönderdiğini ve $w = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$ vektörünü sabit bıraktığını gözlemliyoruz:



Bu etki, w vektörünü sabit bıraktığı gibi bu vektörün gerdiği W altuzayını da kendisine gönderir. Bu durumu daha önce incelemiştik.

Bu geometrik gözlem ile şunu da fark ediyoruz: a elemanının etkisi, W doğrusunu sabit bırakarak $V = R^3$ uzayını bu doğru etrafında döndürüyor. Bu hareketin W doğrusuna dik olan U düzlemini de kendisine götürdüğünü (yani, her $u \in U$ için $au \in U$ olduğunu) gözlemleyelim:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

olsun. Rastgele $u = (u_1, u_2, u_3) \in U$ alalım. Bu durumda $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu vektörü

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

şeklinde standart tabanda ifade edelim. Öyleyse

$$\begin{aligned} au &= u_1 a e_1 + u_2 a e_2 + u_3 a e_3 \\ &= u_1 e_2 + u_2 e_3 + u_3 e_1 \\ &= (u_3, u_1, u_2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $u_3 + u_1 + u_2 = 0$ olduğundan $au \in U$ sonucuna ulaşırız.

Soru 7. Neden $u \in U$ iken $a^2 u \in U$ şartı da sağlanır?

Önceki örneğimizde W altuzayından alınan vektörler grup elemanlarının etkisi altında sabit kalmaktaydı, dolayısıyla FG-altmodülü tanımındaki grup etkisi şartı otomatik olarak sağlanmaktaydı. U altuzayından alınan vektörlerin ise grup etkisi altında sabit kalmadıklarına, ama yine U uzayında vektörlere gittikleri için grup etkisi şartının sağlandığına dikkat edin.

Böylece U altuzayının, V 'nin bir FG-altmodülü olduğunu görüyoruz.

U uzayının bir tabanının $\alpha_1 = (1, -1, 0)$ ve $\alpha_2 = (1, 0, -1)$ vektörlerinden oluştuğunu gözlemleyelim.

Soru 8. Verilen α_1, α_2 vektörlerine uygun bir α_3 vektörü ekleyerek $V = \mathbb{R}^3$ için bir $\mathcal{B}'$ tabanı elde edin. Daha sonra $[a]_{\mathcal{B}'}$ matrisini elde edin ve blok formunda nasıl göründüğünü gözlemleyin.

Soru 9. Kitapta sayfa 51'deki ikinci örnek ($G = D_8, V = F^2$) üzerine düşünün.

Bölüm 4

Grup Cebirleri

Uyarı ve hatırlatmalar:

– Karışmamaları için bir grubun etkisiz elemanını e ile, cismin birim elemanını ise 1 ile göstereceğiz.

Herhangi bir FG-modülünü düşündüğümüzde, elimizde

$$G \times V \to V$$

biçiminde, bir G grubunun V uzayı üzerindeki etkisini veren bir işlem olduğunu hatırlayalım. Ayrıca, vektör uzayı yapısından da

$$F \times V \to V$$

skaler çarpım işlemimiz geliyor. Bu iki işlemin de, V uzayındaki vektörlerin yine vektör verecek şekilde (F cisminden ya da G grubundan) birtakım elemanlarla çarpımı formunda olduğunu görüyoruz. Sorumuz şu: bu iki işlemi, hem G grubunu hem de F cismini içerecek FG adında yeni bir yapı için bir

$$FG \times V \to V$$

işleminde birleştirebilir miyiz? Bunu yapabilmek için *grup cebiri* kavramına ihtiyacımız olacak.

4.1 Grup cebiri

Bir G grubu ve F cismi verilmiş olsun. Şimdi bunları kullanarak bir FG kümesi tanımlayalım:

$$A = \{\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_n g_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in F, g_i \in G\}$$

Yani FG kümesi, G grubundan elemanların F cisminden elemanlarla çarpımlarının toplamı olarak yazılan tüm *formel*[1] ifadelerden oluşuyor. Ayrıca burada toplam sembolünün değişme ve bileşme özelliklerinin olduğunu ve $\lambda, \mu \in F$ ve $g \in G$ için

$$\lambda g + \mu g = (\lambda + \mu) g$$

eşitliğini de kabul ediyoruz. Bir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \in FG$ için λ_i skalerine $g_i \in G$ elemanının *katsayısı* diyelim. Bir $g \in G$ elemanının katsayısını λ_g ile göstererek, yani başka bir deyişle katsayıları grubun elemanları ile indeksleyerek, FG 'nin elemanlarını

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g$$

biçiminde de yazacağız

Şimdi bu küme üzerinde toplama ve F ile skaler çarpma işlemlerini tanımlayarak bu kümeyi F üzerinde bir vektör uzayı haline getirelim:

i. $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ ve $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i \in FG$ için

$$u + v := \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i$$

[1] *formel*: biçimsel. Bununla şunu kastediyoruz: bir $\lambda \in F$ ve $g \in G$ için λg şeklinde bir çarpımı ya da bu tip yazımların toplamını daha önceden tanımlamadığımızın farkındayız. Yeni kümemimiz elemanları böyle çarpım ve yazım işlemlerinin sonuçları değil, bu yazımların kendisi.

ii. $\mu \in F$ ve $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \in FG$ için

$$\mu u := \sum_{i=1}^{n} (\mu\lambda_i) g_i \ .$$

Yani, FG 'nin iki elemanını toplarken her bir grup elemanının katsayılarını topluyoruz. FG 'nin bir elemanını bir skalerle çarparken ise her bir grup elemanının katsayısını o skalerle çarpıyoruz.

Bu şekilde, F cismi üzerinde tabanı G kümesi olan bir FG vektör uzayı elde ederiz. Bu tabana FG 'nin *doğal tabanı* diyelim.

Soru 1. FG vektör uzayının boyutu nedir?

Örnek 4.1. $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = e \rangle = \{e, a, a^2\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} FG &= \{\lambda_1 e + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F\} \qquad (4.1)\\ &= \{\lambda_e e + \lambda_a a + \lambda_{a^2} a^2 : \lambda_e, \lambda_a, \lambda_{a^2} \in F\} \end{aligned}$$

olur.

Bu FG vektör uzayı üzerinde (genelde vektör uzayları üzerinde tanımlı olmayan) yeni bir işlem daha tanımlayacağız: FG 'den iki eleman aldığımızda bunları işleme sokabileceğiz, yani

$$FG \times FG \to FG$$

şeklinde bir "çarpma" işlemimiz daha olacak.

Hatırlayalım: FG uzayının doğal tabanı G grubunun elemanlarından oluşuyor ve grubun elemanları üzerinde "çarpma" işlemi zaten tanımlı ve FG uzayının elemanları, G grubunun elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılıyor. Dolayısıyla aradığımız işlemi, grup işlemi sayesinde ve vektör uzayı toplaması üzerinde dağılma özelliğine sahip olacak şekilde şöyle tanımlamak akla yatkın görünüyor:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) &:= \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh) \qquad (4.2)\\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g}\right) g \ . \qquad (4.3) \end{aligned}$$

Tanım 4.1. Denklem 4.2 ile tanımlanan işlemle birlikte FG uzayına, G 'nin F üzerindeki *grup cebiri* denir.

Soru 2. Denklem 4.3 satırının, 4.2 satırındaki ifadede bir $g \in G$ elemanının tüm katsayıları bir araya getirilerek elde edildiğini kontrol edin.

Örnek 4.2. Yukarıdaki Örnek 4.1 ile tanımlanan FG grup cebirinden iki eleman alarak çarpalım. Örneğin

$$u = 2e - a + 3a^2 \ , \ v = e - \frac{1}{2}a^2$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} uv &= (2e - a + 3a^2)\left(e - \frac{1}{2}a^2\right) \\ &= 2ee - ea^2 - ae + \frac{1}{2}a^3 + 3a^2e - \frac{3}{2}a^2a^2 \\ &= 2e - a^2 - a + \frac{1}{2}e + 3a^2 - \frac{3}{2}a \\ &= \frac{5}{2}e - \frac{5}{2}a + 2a^2 \end{aligned}$$

olduğunu hesaplayabiliriz.

FG uzayında tanımladığımız bu çarpma işlemi, belli temel özellikleri sağlar. Bu özellikleri sıradaki önermede özetleyeceğiz.[2]

Önerme 4.2. *Her $r, s, t \in FG$ ve her $\lambda \in F$ için:*

i. $r(st) = (rs)t$

ii. $(r + s)t = rt + st$

iii. $r(s + t) = rs + rt$

[2]Kitapta, FG uzayındaki $1e$ elemanını 1 ile göstermek tercih edilmiş. Bu notlarda aynı elemanı e ile göstermeyi tercih edeceğiz. Örneğin bu notasyonla aşağıdaki önermede Madde (iv) 'teki ifade kitaptakinden farklı hale geldi, karşılaştırın. Ayrıca FG uzayındaki sıfır vektörünü aşağıda 0 ile gösteriyoruz.

iv. $re = er = r$

v. $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$

vi. $r0 = 0r = 0$

denklemleri sağlanır.

FG uzayının vektör toplaması ile halihazırda abelyan grup yapısına sahip olduğunu hatırlayalım. Buna ek olarak Madde (i-iv) ile FG 'nin vektör toplaması ve yeni tanımlanan çarpma işlemiyle bir *birim elemanlı halka* olduğunu görüyoruz. Madde (v), skaler çarpma ile yeni tanımlı çarpmanın uyumlu olduğunu gösteriyor. Madde (vi) ise halka yapısının bir sonucu.

Not: Genel olarak, eğer bir A uzayının üzerinde Önerme 4.2 ile verilen özellikleri sağlayan bir

$$A \times A \to A$$

işlemi tanımlıysa, bu vektör uzayına bir *cebir* denir. Dolayısıyla yukarıda tanımladığımız grup cebiri, bu anlamda da bir cebir oluşturur.

Soru 3. Madde (i) denkleminin ispatını kitaptan çalışın. Madde (ii) denkleminin ispatını yapın.

4.2 Düzenli FG-modülü

Herhangi bir F cismi ve G grubu için önceki kısımda tanımladığımız FG adındaki grup cebirinin aynı zamanda bir vektör uzayı olduğunu ve $\mathcal{B} = G$ doğal bazına sahip olduğunu hatırlayalım. Ayrıca, her $g \in G$ ve $v \in FG$ için $gv \in FG$ tanımlı olduğundan G grubunun FG üzerinde bir etkisini FG için tanımladığımız çarpma işlemini kullanarak

$$\begin{aligned} G \times FG &\to FG \\ g, v &\mapsto gv \end{aligned} \tag{4.4}$$

ile tanımlayabiliyoruz. (Burada her $g \in F$ grup elemanını $g = 1g \in FG$ olarak gördüğümüzü düşünebiliriz.)

Bu işlem ile FG; bir FG-modülü yapısına sahip olur.

Soru 4. Grup cebiri olan $V = FG$ 'nin, Denklem 4.4 işlemi ile birlikte bir FG-modülü tanımladığını gösterin.

Tanım 4.3. Grup cebiri olarak tanımlanan FG 'nin, Denklem 4.4 işlemiyle oluşturduğu FG-modülüne *düzenli FG-modülü* denir.
Bu FG-modülünden $\mathcal{B} = G$ doğal bazı aracılığıyla elde edilen grup temsiline *düzenli temsil* denir.

Önerme 4.4. *Düzenli FG-modülü sadıktır.*

Kanıt. Bir $g \in G$ seçelim ve her $v \in FG$ için $gv = v$ olduğunu varsayalım. Öyleyse özel olarak $e \in FG$ için de $ge = e$ olmalıdır. Diğer yandan $ge = g$ olduğundan $g = e$ elde ederiz. $\square$

Örnek 4.3. Yine önceki örneklerdeki gibi $G = C_3$ ile devam edelim. Bu durumda grup cebiri FG, Denklem 4.1 ile açık olarak yazılmıştı.

Grup elemanlarının FG 'nin doğal tabanı, yani yine $\mathcal{B} = G$ üzerindeki etkisini rahatlıkla hesaplayabiliriz. Örneğin $a \in G$, doğal taban üzerinde şu şekilde etki eder:

$$\begin{aligned} ae &= a &&= 0e + 1a + 0a^2 \\ aa &= a^2 &&= 0e + 0a + 1a^2 \\ aa^2 &= e &&= 1e + 0a + 0a^2 \end{aligned}$$

Buradan $[a]_{\mathcal{B}}$ oluşturulur. Yine aynı şekilde, ya da $[a]_{\mathcal{B}}$ matrisinin karesi alınarak $[a^2]_{\mathcal{B}}$ matrisi de elde edilir. $[e]_{\mathcal{B}}$ matrisinin birim matris olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak, $G = C_3$ grubunun düzenli temsilinin

$$e \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; a \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; a^2 \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Bu örneği inceleyerek şu sonucu görüyoruz:

Sonuç 4.5. *Düzenli modüller permütasyon modülüdür.*

Soru 5. Sonuç 4.5 önermesini ispatlayın.

4.3 FG, her FG-modülü üzerine etkir

Bölümün başında belirttiğimiz üzere, FG grup cebirini her V adında FG-modülüne

$$FG \times V \to V$$

şeklinde etki etmek üzere oluşturmuştuk. Şimdi bu etkiyi net olarak, bir işlemle tanımlayalım:

Tanım 4.6. V bir FG-modülü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} FG \times V &\to V \\ r, v &\mapsto rv \end{aligned}$$

işlemi, her $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in FG$ ve $v \in V$ için

$$rv = \sum_{g \in G} \lambda_g (gv)$$

olarak tanımlanır.

Bu etkinin özelliklerini aşağıdaki önermeyle özetleyebiliriz.

Önerme 4.7. *V bir FG-modülü olsun. Bu durumda, her $u, v \in V$, her $\lambda \in F$ ve her $r, s \in FG$ için:*

i. $(rs)v = r(sv)$

ii. $ev = v$

iii. $r(u + v) = ru + rv$

iv. $(r+s)v = rv + sv$

v. $r(\lambda v) = \lambda(rv) = (\lambda r)v$

vi. $0v = 0$

denklemleri sağlanır.

Soru 6. Önermede Madde (i) 'deki denklemin ispatını kitaptan çalışın. Madde (iii) 'teki denklemi ispatlayın.

Not: Matematikte, bir R halkası ve M abelyan grubu için, Önerme 4.7 ilk dört maddedeki özellikleri sağlayan bir

$$R \times M \to M$$

işlemi ile birlikte, M bir (sol) *R-modüldür* denir. (Bu tanımın vektör uzayı tanımına çok benzediğini, fakat cismin rolünü bu sefer bir halkanın üslendiğini görebilirsiniz.) Dolayısıyla Önerme 4.7, FG-modülü için her iki tanımın uyumlu olduğunu gösteriyor.

Bölüm 5

FG-homomorfizmleri

Matematikte daha önce gördüğümüz tüm cebirsel yapılar için bu yapıların işlemleriyle uyumlu, yani bu yapıları koruyan fonksiyonları incelemiştik: Gruplar için grup homomorfizmleri, halkalar için halka homomorfizmleri, vektör uzayları için lineer dönüşümler, vb.

Dersimizde yeni bir cebirsel yapı türü olarak FG-modüllerini tanımladık. Bu bölümde de bu yeni tür cebirsel yapının *yapısal fonksiyonlarını* tanımlacağız ve bulara FG-homomorfizmi adını vereceğiz.

5.1 FG-homomorfizmi

Önceki cebirsel yapı örneklerinde olduğu gibi, yapısal fonksiyonlarımız cebirsel yapımızın işlemlerini koruyan fonksiyonlar olacak. Bir FG-modülü için üç işlem olduğunu hatırlayalım: Vektör uzayı yapısından gelen skaler çarpma ve toplama işlemleri, ve ayrıca grup etkisi işlemi. V ve W birer FG-modülü olmak üzere bir

$$\varphi : V \to W$$

fonksiyonunun vektör uzayı yapısından gelen skaler çarpma ve toplama işlemlerini koruması için bir lineer dönüşüm olması gerekli ve yeterlidir. [1] Dolayısıyla bir FG-homomorfizmini şu şekilde tanımlıyoruz:

Tanım 5.1. V ve W birer FG-modülü olmak üzere, bir

$$\varphi : V \to W$$

lineer dönüşümü her $g \in G$ ve her $v \in V$ için

$$\varphi(gv) = g\varphi(v) \tag{5.1}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu φ fonksiyon V 'den W 'ya bir *FG-homomorfizmidir* denir.

Tanımdaki Denklem 5.1'e daha dikkatli bakalım. Eşitliğin sol tarafında g elemanı $v \in V$ vektörüne etkiyor, yani V 'deki grup etkisini kullanıyoruz. Eşitliğin sağında ise bu sefer g, diğer FG modülünde yani W 'da olan φv elemanına etki ediyor. [2]

Burada Denklem 5.1 'in iki tarafına da g^{-1} ile etki edersek $g^{-1}(\varphi(gv)) = \varphi(v)$ ifadesini elde ettiğmizi fark ediyoruz. Bu ifadeyi, grup etkisinin ve fonksiyonun $v \in V$ elemanına uygulanışını düşünerek

$$g^{-1}\varphi g = \varphi \tag{5.2}$$

formunda da yazabiliriz.

G sonlu bir grupken, elimizde $\varphi : V \to W$ şeklinde bir FG-homomorfizmi oluğunda her $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in FG$ ve $v \in V$ için

$$r(\varphi v) = \varphi(rv) \tag{5.3}$$

lineerlikten sağlanır.

[1] Kitapta FG-homomorfizmi için genelde ϑ sembolü kullanılmış. Biz bu notlarda φ sembolünü tercih edeceğiz.

[2] Bundan sonra φ bir lineer dönüşüm ya da FG-homomorfizmi olduğunda sık sık notasyonda parantezi ihmal edeceğiz ve $\varphi(v)$ yerine φv yazacağız.

Soru 1. Denklem 5.3'yi ispatlayın.

Sıradaki önerme ile göreceğiz ki yine yapısal fonksiyonlarının önceki örneklerindeki gibi FG-homomorfizmlerinin görüntüsü (imaj) ve sıfırın öngörüntüsü (kernel) birer alt-yapı oluşturur, ki bizim durumumuzda bunlar FG-altmodülü olarak adlandırılıyordu. FG-modüllerinin aynı zamanda birer vektör uzayı olduğunu hatırlayalım. Dolayısıyla φ bir FG-homomorfizmi olduğunda aynı zamanda bir lineer dönüşüm oluğundan, φ 'nin kerneli (çekirdeği) $\operatorname{Ker}\varphi$ ve imajı (görüntüsü) $\operatorname{Im}\varphi$ halihazırda birer vektör altuzayı olarak tanımlıdır.

Önerme 5.2. *$\phi : V \to W$ olarak verilmiş bir FG-homomorfizmi için* $\operatorname{Ker}\varphi$ *altuzayı V 'nin,* $\operatorname{Im}\varphi$ *ise W 'nun birer FG-altmodülüdür.*

Kanıt. $\operatorname{Ker}\varphi$ 'nin V 'de bir FG-altmodülü olduğunu gösterelim. Öncelikle, bir altuzay olduğunu lineer cebirden zaten biliyoruz. Dolayısıyla, sadece grup etkisi altında kapalı olduğunu göstermeliyiz.

Rastgele bir $v \in \operatorname{Ker}\varphi$ alalım, yani $\varphi v = 0_W$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(gv) = g(\varphi v) = g0_W = 0_W$$

olur. Böylece her $v \in \operatorname{Ker}\varphi$ için $gv \in \operatorname{Ker}\varphi$ olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla $\operatorname{Ker}\varphi$ 'nin, V 'nin bir FG-altmodülüdür. □

Soru 2. $\operatorname{Im}\varphi$ 'nin, W 'nun bir FG-altmodülü olduğunu gösterin.

Örnek 5.1. Skaler çarpma:

Soru 3. Herhangi bir $\lambda \in F$ ve FG-modülü V için $\varphi : V \to V$ fonksiyonu

$$\varphi(v) = \lambda v$$

olarak tanımlanmış olsun. Bu fonksiyonun bir FG-homomorfizmi olduğunu gösterin. λ 'nın değerinin 0 olduğu ve olmadığı durumlarda, $\operatorname{Ker}\varphi$ ve $\operatorname{Im}\varphi$ FG-altmodüllerini bulun.

Örnek 5.2. Burada, kitapta sayfa 62'deki Örnek 7.3 (3)'ün özel bir durumunu inceleyeceğiz. Bu örneği kitaptaki örnek ile karşılaştırarak okumalısınız.

Grubumuzu $G = C_3$, yani üç elemanlı devirli grup alalım. Bu grubu üç eleman üzerindeki simetrik grup, yani S_3 'ün altgrubu olarak görebiliriz. Özel olarak, eğer döngüsel notasyonla $a = (123) \in S_3$ seçersek, $\langle a \rangle \cong C_3$ olduğunu görürüz.

Şimdi vektör uzayı olarak $V = \mathbb{R}^3$ 'ü alalım. V 'nin bir $\mathcal{B} : v_1, v_2, v_3$ tabanı seçelim. (Kolay görselleştirme için standart tabanı düşünebiliriz). G grubunun, bu taban elemanlarını permüte ederek V üzerine etki ettiği permütasyon modülünü düşünelim. Bu, tam olarak Örnek 3.1'te incelediğimiz FG-modülüdür.

İkinci olarak ise W adında bir aşikar FG-modülü alalım. Aşikar FG-modülü tanımını hatırlayalım: Bu durumda W, 1 boyutlu bir uzaydır, yani sıfırdan farklı bir $w \in W$ için $W = \langle w \rangle$ olur. Grubun etkisi de aşikardır, yani her $g \in C_3, u \in W$ için $gu = u$ olur.

Şimdi, $\varphi : V \to W$ şeklindeki bir FG-homomorfizmini her $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in V$ için

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) := (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) w$$

olarak tanımlayalım, yani $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\right) w$ olsun. Burada, her bir v_i vektörünü w vektörüne gönderdimize dikkat edelim.

Soru 4. φ fonksiyonunun bir FG-homomorfizmi olduğunu gösterin.

Bu fonksiyon örtendir (neden?) ve dolayısıyla $\operatorname{Im} \varphi = W$ olur. $\operatorname{Ker} \varphi$ ise şöyle hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\varphi &= \varphi^{-1}(0_W) \\
&= \{v \in V : \varphi(v) = 0_W\} \\
&= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in V : \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = 0_W\} \\
&= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in V : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) w = 0_W\} \\
&= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \in V : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i \in V : \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Başka bir deyişle, $\mathcal{B}$ tabanında katsayıları toplamı 0 olan vektörler $\operatorname{Ker}\varphi$ 'yi oluşturur. Bunun, Örnek 4.1'de U ile gösterilen FG-altmodülü olduğuna dikkat edelim.

5.2 İzomorfik FG-modülleri

Yine daha önceden bildiğimiz cebirsel yapılardaki gibi, FG-modülleri için de eşyapılılık tanımlayacağız. Bu tanımdan önce FG-homomorfizmlerinin de aynı grup homomorfizmleri gibi, tersinir oldukları durumda ters almaya göre düzgün davrandıklarını gözlemleyelim.

Lemma 5.3. *$\varphi : V \to W$ tersinir bir FG-homomorfizmi olsun. Bu durumda $\varphi^{-1} : W \to V$ fonksiyonu da bir FG-homomorfizmidir.*

Kanıt. φ^{-1} fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olduğunu lineer cebirden biliyoruz. Grup etkisi şartını konkrol edelim. Rastgele birer $g \in G$ ve $w \in W$ alalım. $\varphi^{-1}(w) = v$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
g\varphi^{-1}(w) &= gv \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(gv)) \\
&= \varphi^{-1}(g\varphi(v)) \\
&= \varphi^{-1}(gw)
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Bu da bize φ^{-1} fonksiyonunun bir FG-homomorfizmi olduğunu verir. $\square$

Bu lemma sayesinde, FG-homomorfizmlerinin tersinir oldukları durumda terslerinin de FG-homomorfizmi olup olmadığından endişe etmemize gerek kalmıyor. Dolayısıyla tanımımızı şu şekliyle veriyoruz:

Tanım 5.4. Bir $\varphi : V \to W$ fonksiyonu eğer tersinir bir FG-homomorfizmi ise φ bir *FG-izomorfizmidir* denir. Aralarında böyle bir FG-izomorfizmi olduğunda V ile W *izomorfik FG-modülleridir* denir.

Bir FG-izomorfizminin aynı zamanda bir vektör uzayı izomorfizmi de olduğuna dikkat edelim. Yukarıdaki Lemma 5.3'ten şu sonuç hemen elde edilir:

Sonuç 5.5. *Eğer $\varphi : V \to W$ bir FG-izomorfizmi ise $\varphi^{-1} : W \to V$ de bir FG-izomorfizmidir.*

FG modüllerinin izomorfizmiyle ilgili birkaç temel özelliği gözlemleyelim: V ve W izomorfik FG-modülleri olsun. Bu durumda

(i) Vektör uzayı olarak da izomorfiklerdir. Dolayısıyla $\dim V = \dim W$ olur.

(ii) Eğer V indirgenemez ise W da indirgenemezdir.

(iii) Eğer V bir aşikar FG-modülü ise W da aşikar FG-modülüdür. Ayrıca tüm aşikar FG-modülleri izomorfiktir.

(iv) Eğer V aşikar FG-modülü yapısında bir FG altmodülü içeriyor ise W da aşikar FG-modülü yapısında bir FG altmodülü içerir.

Soru 5. Bu özellikler neden doğrudur?

Daha önce, bir taban seçimi ile FG-modüllerinin G grubunun temsillerine karşılık geldiğini görmüştük. Sıradaki önerme, bu ilişkide FG-izomorfizmlerinin de grup temsillerinin denkliğine karşılık geldiğini söylüyor.

Theorem 5.6. *V ve W, sırasıyla $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}'$ tabanlarına sahip birer FG-modülü olsunlar. Öyleyse V ve W izomorfik FG-modülleridir ancak ve ancak*

$$\rho : g \mapsto [g]_{\mathcal{B}} \quad \textit{ve} \quad \sigma : g \mapsto [g]_{\mathcal{B}'}$$

şeklinde tanımlı grup temsilleri denk ise.

Kanıt. V ve W 'nin $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{B}'$ tabanları

$$\mathcal{B} : v_1, \ldots, v_n \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{B}' : w_1, \ldots, w_n$$

olarak verilsin. Ayrıca bir $g \in G$ seçildiğinde bu grup elemanının ilgili grup temsilleri altında görüntüsü olan matrisleri $A := [g]_{\mathcal{B}}$ ve $A' := [g]_{\mathcal{B}}$ ile belirtelim. Bu durumda, her $s, j = 1, \ldots, n$ için

$$gv_s = \sum_k A_{ks} v_k \tag{5.4}$$

$$gw_j = \sum_i A'_{ij} w_i \tag{5.5}$$

sağlanır.

Önce V ve W 'nun izomorfik FG-modülleri olduklarını kabul edelim ve $\varphi : V \to W$ şeklinde bir FG-izomorfizmi alalım. Bu durumda, φ aynı zamanda bir vektör uzayı izomorfizmi olduğundan $\varphi v_1, \ldots, \varphi v_n$ de W 'nun bir tabanıdır. Dolayısıyla bir tersinir P matrisi vardır ki her $k = 1, \ldots, n$ için

$$\varphi v_k = \sum_i P_{ik} w_i \tag{5.6}$$

sağlanır. Bu durumda, her $j = 1, \ldots, n$ için

$$w_j = \sum_s P^{-1}_{sj} \varphi v_s \tag{5.7}$$

eşitliği de, ters yönde taban değişikliği matrisi P^{-1} olduğundan doğrudur.

Denklem 5.7'ün iki tarafına da g ile etki edelim:

$$\begin{aligned}
gw_j &= g\left(\sum_s P^{-1}_{sj}\varphi v_s\right) \\
&= \sum_s P^{-1}_{sj} g(\varphi v_s) && (g \text{ etkisi lineer işlemlerle uyumlu}) \\
&= \sum_s P^{-1}_{sj} \varphi(g v_s) && (\varphi \text{ bir } FG\text{-homomorfizmi}) \\
&= \sum_s P^{-1}_{sj}\ \varphi\left(\sum_k A_{ks} v_k\right) && (\text{Denklem } 5.4) \\
&= \sum_s P^{-1}_{sj} \sum_k A_{ks}(\varphi v_k) && (\varphi \text{ lineer}) \\
&= \sum_k \underbrace{\left(\sum_s A_{ks} P^{-1}_{sj}\right)}_{(AP^{-1})_{kj}} \varphi v_k \\
&= \sum_k (AP^{-1})_{kj}\ \varphi v_k \\
&= \sum_k (AP^{-1})_{kj}\ \sum_i P_{ik} w_i && (\text{Denklem } 5.6) \\
&= \sum_i \underbrace{\left(\sum_k P_{ik}(AP^{-1})_{kj}\right)}_{[P.(AP^{-1})]_{ij}} w_i \\
&= \sum_i (PAP^{-1})_{ij} w_i
\end{aligned}$$

elde ediyoruz. Bu ifadeyi Denklem 5.5 ile karşılaştırınca $A' = PAP^{-1}$ olduğunu görüyor ve $[g]_{\mathcal{B}'} = P[g]_{\mathcal{B}}P^{-1}$ sonucuna ulaşıyoruz. Böylece ρ ve σ temsillerinin denk olduğunu görüyoruz.

Ters yönü ispatlamak için, ρ ve σ temsillerinin denk olduğunu varsayalım. Bu durumda $A' = PAP^{-1}$ olacak şekilde bir P tersinir matrisi vardır. Öyleyse $A'P = PA$ denklemi de sağlanır. Bir $\varphi : V \to W$ lineer dönüşümünü $\mathcal{B}$ ve

$\mathcal{B}'$ tabanları cinsinden

$$\varphi v_k := \sum_j P_{jk} w_j \tag{5.8}$$

olarak tanımlayalım. [3] P matrisi tersinir olduğundan φ bir tersinir lineer dönüşümdür. Öyleyse sadece Denklem 5.1 şartını kontrol etmeliyiz. Bu şartı $\mathcal{B}$ tabanında kontrol etmemiz yeterli (neden?). Bunun için, Denklem 5.8'in iki tarafına bir $g \in G$ ile etki edelim.

$$\begin{aligned}
g(\varphi v_k) &= g\left(\sum_j P_{jk} w_j\right) \\
&= \sum_j P_{jk}(g w_j) \\
&= \sum_j P_{jk} \sum_i A'_{ij} w_i \\
&= \sum_i \left(\sum_j A'_{ij} P_{jk}\right) w_i \\
&= \sum_i (A'P)_{ik} w_i \\
&= \sum_i (PA)_{ik} w_i \\
&= \sum_i \left(\sum_j P_{ij} A_{jk}\right) w_i \\
&= \sum_j \left(A_{jk} \sum_i P_{ij} w_i\right) \\
&= \sum_j A_{jk} \varphi v j \\
&= \varphi \sum_j A_{jk} v j \\
&= \varphi(g v_k)
\end{aligned}$$

[3] Başka bir deyişle, bu taban çifti için φ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $[\varphi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P$ olur

Soru 6. Bu çıkarsamada her aşamada hangi özelliğin ya da denklemin kullanıldığını belirleyin.

□

Soru 7. Kitapta sayfa 67'deki Örnek 7.9'u inceleyin.

Soru 8. Vektör uzayları için *direkt toplam* kavramını tekrarlayın.

5.3 Direkt Toplamlar

Önce, vektör uzayları için direkt toplamın ve lineer dönüşümler için direkt toplam ayrışmasının ne anlama geldiğini hatırlayalım.

5.3.1 Vektör uzaylarında direkt toplam

Bir V vektör uzayını düşünelim. Bu uzayın sonlu adet $U_1, \ldots, U_k$ altuzaylarını alalım.

- Eğer U uzayındaki her vektör bu altuzaylardaki vektörlerin toplamı olarak yazılabiliyorsa, yani her $v \in V$ için

  $$v = u_1 + \ldots u_k$$

  olacak şekilde $u_i \in U_i, i = 1, \ldots k$ vektörleri varsa V uzayı $U_1, \ldots, U_k$ altuzaylarının *toplamıdır* denir. ve

  $$V = U_1 + \ldots + U_k$$

  yazılır. Bu şartın, V uzayının verilen altuzayların bileşimi tarafından gerilmesine denk olduğuna dikkat edin.

- Eğer $u_i \in U_i, i = 1, \ldots, k$ vektörleri için

$$u_1 + \ldots + u_k = 0_V$$

denklemli sadece bu toplanan vektörlerin her birinin sıfır vektörü olduğunda, yani $u_1 = \ldots = u_k = O_V$ durumunda sağlanıyorsa bu altuzaylar *lineer bağımsızdır* denir. Bu şart, verilen altuzayların tabanlarının bir araya getirildiğinde lineer bağımsız olması ile denktir.

- Eğer altuzaylar bu iki şartı da sağlıyorsa, yani hem toplamları V uzayı ise hem de lineer bağımsız iseler, V uzayı $U_1, \ldots, U_k$ altuzaylarının *direkt toplamıdır* denir ve

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$$

yazılır.

Soru 9. Eğer $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ ise her $v \in V$ vektörü U_i altuzaylarındaki vektörlerin toplamı olarak tek bir şekilde

$$v = u_1 + \ldots + u_k \ : \ u_i \in U_i, i = 1, \ldots, k$$

biçiminde yazılabilir, ispatlayın.

- Bir $v \in V$ vektör bir direkt toplam için Denklem 9 formunda yazıldığında u_i vektörüne v vektörünün U_i *bileşeni* denir. Her bir v vektörünü U_i bileşenine gönderen fonksiyonu π_i ile gösterelim.

Soru 10. $\pi_i : V \to V$ fonksiyonunun V 'nin U_i üzerine bir izdüşümü olduğunu gösterin. [4]

Bu nedenle π_i dönüşümü, U_i bileşenine izdüşüm olarak adlandırılır.

[4]Eğer bir $\pi : V \to V$ lineer dönüşümü $\pi^2 = \pi$ şartını sağlıyorsa bu dönüşüme $\mathrm{Im}\,\pi$ üzerine bir *izdüşüm* dendiğini hatırlayalım. Burda π^2 ile bileşkeyi kastediyoruz, yani $\pi^2 = \pi \circ \pi$.

Örnek 5.3. Üç boyutlu $V = \mathbb{R}^3$ gerçel vektör uzayını düşünelim. Bu uzayın U ve W altuzayları sırasıyla xy-düzlemi ve yz-düzlemi olsun. Açık olarak yazacak olursak:

$$U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$W = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımladık. Şimdi, $V = U + W$ sağlanır çünkü herhangi bir $v = (x, y, z)$ vektörünü $u = (x, y, 0) \in U$ ve $w = (0, 0, z) \in W$ için $v = u + w$ olarak yazabildiğimizi görüyoruz. Bununla birlikte, U ve W altuzayları lineer bağımsız değil çünkü sıfır vektörü, U ve W altuzaylarından sıfır vektöründen farklı elemanların toplamları olarak, örneğin $0_V = (1, 0, 0) + (-1, 0, 0)$ şeklinde yazılabiliyor. Dolayısıyla V uzayı, U ve W uzaylarının direkt toplamı değil.

Şimdi, z-eksenini Z altuzayı olarak isimlendirelim. Bu dumumda, $V = U \oplus Z$ olur (nasıl?).

Lineer dönüşümler ve değişmez altuzaylar:

Temelde direkt toplam, yüksek boyutlu bir vektör uzayını içindeki daha küçük boyutlu altuzayları cinsinden ifade etmemizi ve anlamamızı sağlıyor. Bu açıdan, direkt toplam kavramı tabanlarla da uyumlu: Eğer bir uzay birtakım altuzaylarının toplamı olarak ifade edilmişse, bu altuzayların tabanları bir araya getirildiğinde büyük uzayın bir tabanını oluşturur. Örneğin $V = U \oplus W$ alalım. Eğer U altuzayının bir tabanı $u_1, \ldots, u_n$ ve W altuzayının bir yabanı $w_1, \ldots, w_m$ ise $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m$ vektörleri V uzayının bir tabanını oluşturur. Buradan, bir direkt toplamda büyük uzayın boyutunun altuzayların boyutları toplamına eşit olduğunu gözlemliyoruz.

Eğer bir V vektör uzayı üzerinde bir $\psi : V \to V$ lineer dönüşümü verilmişse, bu dönüşümü anlamanın bir yolu V uzayından daha küçük bir $U < V$ altuzayı üzerindeki davranışına bakmak olabilir. Ama bunu en faydalı şekilde yapabilmemiz için, dönüşümün bu altuzaya kısıtlaması bize bu U altuzayı üzerinde bir dönüşüm vermeli. Bunun için de U altuzayındaki vektörlerin görüntüsünün yine U içinde kalması gerekir, yani

$$\text{her } u \in U \text{ için } \psi(u) \in U$$

olmalı, ya da başka bir ifadeyle $\psi(U) \subseteq U$ sağlanmalıdır. Eğer bu şart sağlanıyorsa U altuzayı ψ dönüşümü altında bir *değişmez altuzaydır* diyoruz. Eğer U altuzayı ψ dönüşümü altında değişmez ise

$$\psi|_U : U \to U$$

kısıtlama lineer dönüşümünü elde edebiliyoruz. Bu dönüşümü daha sade biçimde ψ_U olarak yazalım.

Bir vektör uzayı $V = U \oplus W$ şeklinde direkt toplam olarak verilmiş olsun ve U altuzayının bir $\psi : V \to V$ lineer dönüşümü altında değişmez olduğunu varsayalım. Ayrıca, $\mathcal{B}' : u_1, \ldots, u_n$ vektörleri U altuzayının, $\mathcal{B}'' : w_1, \ldots, w_m$ vektörleri W altuzayının bir tabanı olsun. Bu tabanları birleştirerek V uzayının bir $\mathcal{B} : u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m$ tabanını oluşturalım. Şimdi, U altuzayının herhangi bir u_j taban vektörü için U altuzayı değişmez olduğunudan $\psi(u_j) \in U$ şartını sağladığını biliyoruz. Dolayısıyla bu vektörü $\mathcal{B}$ tabanında yazarsak

$$\psi(u_j) = a_{1j}u_1 + \ldots + a_{nj}u_n + 0w_1 + \ldots + 0w_m$$

formunda olduğunu görüyoruz. Buradan da $\mathcal{B}$ tabanında ψ dönüşümünü temsil eden matrisin

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right] \tag{5.9}$$

blok formunda olduğu sonucuna varıyoruz. Ayrıca, buradaki A matrisinin de ψ_U kısıtlama dönüşümüne $\mathcal{B}'$ tabanında karşılık gelen matris olduğunu, yani $A = [\psi_U]_{\mathcal{B}'}$ olduğunu da görüyoruz.

Bunun yanısıra, eğer U ile birlikte W altuzayı da ψ dönüşümü altında değişmez ise $\mathcal{B}''$ tabanındaki her w_j vektörü için $\psi(w_j) \in W$ olur, dolayısıyla bu vektörün $\mathcal{B}$ tabanındaki ifadesi

$$\psi(w_j) = 0u_1 + \ldots + 0u_n + c_{1j}w_1 + \ldots + c_{mj}w_m$$

formundadır. Öyleyse bu durum için Denklem 5.9 ifadesinde B matrisi sıfır matrisine dönüşür ve C matrisi ise tam olarak $\psi_W : W \to W$ kısıtlama dönüşümünün $\mathcal{B}''$ tabanındaki ifadesidir, yani $C = [\psi_W]_{\mathcal{B}''}$ olur. Sonuç olarak, $[\psi]_{\mathcal{B}}$ matrisinin

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} [\psi_U]_{\mathcal{B}'} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & [\psi_W]_{\mathcal{B}''} \end{array}\right] \tag{5.10}$$

blok formunda olduğu sonucuna ulaşırız. Bu ifadenin önemli bir sonucu şudur: Eğer bir V uzayı bir $\psi : V \to V$ dönüşümünün değişmez altuzaylarının toplamı olarak yazılabiliyorsa, bu dönüşüme karşılık gelen matris de kısıtlama dönüşümlerinin matrisleri cinsinden yazılabilir.

Notasyon. Eğer bir kare matrisi Denklem 5.10 ifadesindeki gibi, yani köşegen üzerinde daha küçük kare matrislerin olduğu ve diğer girdilerin sıfır olduğu

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B \end{array}\right]$$

gibi bir blok formuna sahipse direkt toplam notasyonunu matrisler için kullanacak ve

$$C = A \oplus B$$

yazacağız.

Bu notasyonla Denklem 5.10,

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = [\psi_U]_{\mathcal{B}'} \oplus [\psi_W]_{\mathcal{B}''}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 5.4. Yukarıda Örnek 5.3 ile tarif edilen durumdan devam edelim: $V = \mathbb{R}^3$ uzayı için $V = U \oplus Z$ olduğunu görmüştük. Şimdi, $\psi : V \to V$ dönüşümünü

$$\psi(x, y, z) = (-y, x, 2z)$$

olarak tanımlayalım. Bu dönüşüm altında U ve Z altuzayları değişmezdir (gösterin). Ayrıca, U altuzayının bir tabanının $\mathcal{B}' : e_1, e_2$ olduğunu, W altuzayının bir tabanın da $\mathcal{B}'' : e_3$ vektöründen oluştuğunu gözlemliyoruz.Bu tabanlarda ψ_U ve ψ_Z kısıtlama dönüşümlerine karlışık gelen matrisler

$$[\psi_U]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\psi_W]_{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Verilen ψ dönüşümüne standart tabanda karşılık gelen matrisin de, örnekten önceki tartışmayla uyumlu şekilde bu matrisler cinsinden

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

biçimine sahip olduğu görülür.

5.3.2 FG-modüllerinde direkt toplam

Elimizde V ile gösterilen bir FG-modülü olsun ve V 'nin U adında bir FG-altmodülünü düşünelim. Her bir $g \in G$ için g ile V 'nin elemanlarına soldan etkime fonksiyonunun, yani

$$\begin{aligned} \psi_g : V &\to V \\ v &\mapsto gv \end{aligned}$$

fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olduğunu hatırlayalım. U kümesi bir FG-altmodülü olduğunudan G etkisi altında kapalıdır, yani her $u \in U$ için

$$\psi_g(u) = gu \in U$$

sağlanır. Demek ki, herhangi bir FG-altmodülü, her bir $g \in G$ grup elemanının etkisi ile belirlenen ψ_g lineer dönüşümü altında değişmezdir, dolayısıyla $\mathcal{B}' : u_1, \ldots, u_n$ vektörleri U 'nun bir tabanı olmak üzere V 'nin bir $\mathcal{B} : u_1, \ldots u_n, v_1, \ldots, v_m$ tabanı için $[g]_{\mathcal{B}}$ matrisi Denklem 5.9 ile gösterilen blok formuna sahiptir. Burada A matrisi ise g 'nin U üzerindeki etkisini veren lineer dönüşümün $\mathcal{B}'$ tabanındaki matris ifadesine eşittir, yani

$$A = [g]_{\mathcal{B}'}$$

olur.

Şimdi, elimizdeki FG-modülünün U ve W adındaki FG-altmodüllerinin direkt toplamına $V = U \oplus W$ şeklinde eşit olduğunu varsayalım. Ayrıca U 'nun bir tabanı $\mathcal{B}' : u_1, \ldots, u_n$ olarak, W 'nun bir tabanı ise $\mathcal{B}'' : w_1, \ldots, w_m$

olarak verilsin. Bunları birleştirerek V 'nin $\mathcal{B} : u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m$ tabanını elde edelim. Bu durumda, g 'nin V üzerinde etkisini veren lineer dönüşümünün $\mathcal{B}$ tabanındaki matrisi Denklem 5.10 ifadesindeki blok formuna sahip olur, bu yüzden

$$[g]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} [g]_{\mathcal{B}'} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & [g]_{\mathcal{B}''} \end{array}\right]$$

blok formunu elde ederiz. Bu ifadeyi $[g]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}'} \oplus [g]_{\mathcal{B}''}$ olarak da yazabiliriz.

Daha genel olarak, elimizdeki FG-modülü $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ şeklinde $U_1, \ldots, U_k$ ile gösterilen FG-altmodüllerinin direkt toplamı olsun. Ayrıca her $i = 1, \ldots, k$ için U_i 'nin bir tabanı $\mathcal{B}_i$ olsun ve $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ alttabanlarını birleştirerek V 'nin $\mathcal{B}$ tabanını elde edelim. Bu durumda g grup elemanının V üzerindeki etkisini $\mathcal{B}$ tabanında veren matrisi blok formunda

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [g]_{\mathcal{B}_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & [g]_{\mathcal{B}_k} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} [g]_{\mathcal{B}_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & [g]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & & [g]_{\mathcal{B}_k} \end{array}\right]$$

olarak, ya da bir diğer notasyonla

$$[g]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}_1} \oplus \ldots \oplus [g]_{\mathcal{B}_k}$$

biçiminde elde ederiz.

Önerme 5.7. *V bir FG-modülü olsun ve FG-altmodüllerinin direkt toplamı olarak*

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$$

şeklinde yazılsın. Bu durumda, $\pi_i : V \to V$ ile U_i bileşenine izdüşüm gösterilmek üzere, her bir π_i izdüşümü birer FG-homomorfizmidir.

Kanıt. Her bir π_i 'nin birer lineer dönüşüm olduğunu halihazırda biliyoruz. Dolayısıyla FG-homomorfizmi olduklarını göstermek için grup etkisi ile uyumlu olduklarını göstermemiz yeterli. Herhangi bir $g \in G$ ve $v \in V$ alalım. Her $i = 1, \ldots, k$ için öyle birer $u_i \in U_i$ belirlidir ki $v = u_1 + \ldots + u_k$ sağlanır.

Ayrıca her bir U_i birer FG-altmodülü olduğundan $gu_i \in U_i$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda,

$$gv = g(u_1 + \ldots + u_k) = \underbrace{gu_1}_{\in U_1} + \ldots + \underbrace{gu_k}_{\in U_k}$$

olduğundan $\pi_i(gv) = gu_i$ elde ederiz. Diğer yandan

$$g(\pi_i v) = g(\pi_i(u_1 + \ldots + u_k)) = gu_i$$

olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla istediğimiz $\pi_i(gv) = g(\pi_i v)$ sonucuna ulaşıyoruz. □

Sıradaki önerme; elimizde toplamları tüm FG-modülünü veren *indirgenemez* altmodüller varsa, bu indirgenemez FG-altmodüllerinin gereksiz olanlarını atarak ve sadece bazılarını seçerek, verilen FG-modülünü bu indirgenemez FG-altmodüllerin bir kısmının *direkt* toplamı olarak yazabileceğimizi söylüyor.

Önerme 5.8. *V bir FG-modülü olsun ve $U_1, \ldots, U_k$ indirgenemez FG-altmodülleri için*

$$V = U_1 + \ldots + U_k$$

sağlansın. Bu durumda, öyle $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant k$ indeksleri vardır ki

$$V = U_{i_1} \oplus \ldots \oplus U_{i_r}$$

sağlanır.

Kanıt. Söz konusu i_j indekslerini özyinelemeli olarak şöyle seçelim:

I. $i_1 = 1$ olsun.

II. En son i_j seçilmiş olsun. W_j altuzayını şimdiye kadar seçilen altuzayların toplamı, yani $W_j := U_{i_1} + \ldots + U_{i_j}$ olarak tanımlayalım.

III. i_{j+1} olarak, indeksi i_j 'den büyük olan ve W_j ile sadece sıfırda kesişen en küçük indeksli U_i uzayının indeksini seçelim, yani

$$i_{j+1} := \min\{\ i\ :\ i > i_j, U_i \cap W_j = \langle 0_V \rangle\}$$

olsun. Eğer bu şartları sağlayan bir indeks aslında yoksa ve dolayısıyla yukarıdaki minimumu alamıyorsak işlemi bitirelim, eğer varsa Adım II'ye dönelim.

Bi şekilde elde edilen $U_{i_1}, \ldots, U_{i_r}$ altuzayları lineer bağımsızdır (neden?). Bu şekilde seçtiğimiz lineer bağımsız indirgenemez altuzayların direkt toplamını alalım ve W altuzayını $W := U_{i_1} \oplus \ldots \oplus U_{i_r}$ olarak tanımlayalım.

Burada $V = W$ olduğunu iddia ediyoruz. Olmayana ergi yöntemini kullanmak üzere, bu iddanın yanlış olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, V uzayı U_i altuzaylarının toplamı olduğundan bir $s \neq i_1, \ldots, i_k$ indeksi için W altuzayı U_s altuzayını içermemeli, yani $W \cap U_s \neq U_s$ olmalı. Fakat $W \cap U_s$ kesişimi U_s 'nin bir FG-altmodülü olduğundan ve U_s indirgenemez olduğundan $W \cap U_s = \langle 0 \rangle$ elde ederiz.

Şimdi, yukarıdaki özyinelemeli işlemde hangi ara s indeksini atladığımızı belirleyelim: Bir t indeksi için $i_t < s < i_{t+1}$ sağlanır (Eğer s tüm i_j indekslerinden büyükse $t = r$ olsun). Fakat bu durumda s indeksi i_{t+1} olarak seçilmeliydi ama seçilmemiş. Buradan çelişki elde ediyoruz. Dolayısıyla

$$V = W = U_{i_1} \oplus \ldots \oplus U_{i_k}$$

sonucuna ulaşıyoruz.

$\square$

Bölüm 6

Maschke Teoremi

Şu soruyu düşünelim: Elimizde V adında bir FG-modülü ve bunun U adında bir FG-altmodülü olsun. Bu durumda, bu FG-altmodülünün direkt toplama göre bir "tümleyenini" bulabilir miyiz? Yani, $V = U \oplus W$ sağlanmak üzere W adında bir FG-altmodülü bulunabilir mi? [1] Maschke Teoremi, bu soruyu FG-modüllerinin çok önemli bir kısmı için olumlu cevaplıyor. Bu cevabı şöyle de formüle edebiliriz: *Eğer bir grup etkisi bir altuzayı değişmez bırakıyorsa, belli şartlar altında grup etkisinin değişmez bıraktığı bu altuzayın tümleyeni olan bir başka altuzay bulunabilir.*

Önceki haftanın ödevini hatırlayalım: $G = C_4$ ve $F = \mathbb{R}^3$ olmak üzere $V = \mathbb{R}^3$ üzerinde bir FG-modülü yapısı verilmişti. Üçüncü soruda xy-düzlemini U ile isimlendirmiştik ve bunun bir FG-altmodülü olduğunu görmüştük. Burada z-ekseni Z ile isimlendirelim. Elbette Z altuzayı, sadece vektör uzayı yapıları düşünülürse U altuzayının bir tümleyenidir. Fakat biraz daha dikkatli baktığımızda Z 'nin bir FG-altmodülü olmadığını, dolayısıyla U 'nun *FG-modülü yapısına göre* tümleyeni olamayacağını görüyoruz. Dolayısıyla

- hem U 'nun altuzay olarak tümleyeni olan
- hem V 'nin bir FG-altmodülü olan

[1] Bu sorunun ilgili katagorilerde benzerlerinin cevabı vektör uzayları için olumlu, gruplar için ise olumsuzdur.

bir W 'ya ihtiyacımız var. Ödevin dördüncü sorusunda da böyle bir W tanımlanıyor. Peki, bir U adında FG-altmodülü böyle bir W uzayı genel olarak bulunabilir mi, bulunabilir ise nasıl bulunabilir?

Teoremimizden önce, ispatta kullanmak üzere FG-homomorfizmlerinden direkt toplam ayrışması elde etmek için çok kullanışlı olan bir önerme göreceğiz. Bir vektör uzayından kendisine $\psi : V \to V$ lineer dönüşümü verilmişse, bunun V uzayı için $\operatorname{Ker}\psi$ ve $\operatorname{Im}\psi$ cinsinden bir direkt toplam ayrışması verdiğini hatırlayalım: Her $\psi : V \to V$ lineer dönüşümü için $V = \operatorname{Ker}\psi \oplus \operatorname{Im}\psi$ vektör uzayı direkt toplam ayrışması vardır. Bu bilgiyi Önerme 5.2 ile birleştirdiğimizde, aynı sonucun FG-modülleri ve FG-homomorfizmleri için de geçerli olduğu sonucuna ulaşıyoruz:

Önerme 6.1. *V bir FG-modülü, $\varphi : V \to V$ bir FG-homomorfizmi olsun. Bu durumda*

$$V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$$

bir FG-modülü direkt toplam ayrışmasıdır.

6.1 Maschke Teoremi

Teorem 6.2 (Maschke Teoremi)**.** *Sonlu bir G grubu alalım ve F cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun* [2]*. Bu durumda, V bir FG-modülü, U ise V 'nin bir FG-altmodülü ise*

$$V = U \oplus W$$

olacak şekilde V 'nin W adında bir FG-altmodülü vardır.

Kanıt. Önerme 6.1 ile görüyoruz ki, eğer imajı U olan $\varphi : V \to V$ şeklinde bir FG-homomorfizmi bulabilirsek $W = \operatorname{Ker}\varphi$ seçebiliriz ve istediğimiz sonuca ulaşmış oluruz. İspatın kalanında böyle bir φ inşa etmeye çalışacağız.

Öncelikle, U bir altuzay olduğundan *vektör uzayı yapısına göre* $V = U \oplus W_0$ olacak şekilde bir W_0 *altuzayının* varolduğunu biliyoruz. Bu *vektör uzayı direkt toplam ayrışması* için U üzerine izdüşüm lineer dönüşümünü π ile

[2] Aslında F olarak karakteristiği sıfır olan herhangi bir cisim seçilebilir.

gösterelim, yani herhangi bir $v \in V$ için ve $u \in U, w \in W_0$ için $v = u + w$ sağlanıyorsa $\pi v := u$ olsun.

Bu $\pi : V \to V$ izdüşüm lineer dönüşümünün imajının U, kernelinin W_0 olduğunu vurgulayalım. Yapacağımız şey, bu lineer dönüşümü imajını bozmadan bir FG-homomorfizmi haline gelecek şekilde değiştirmek olacak. Bunun için yeni elde edeceğimiz dönüşümün Denklem 5.2 ile gösterildiği gibi grup elemanları ile eşlenik alma altında sabit kalması gerektiğini hatırlayalım. Bunu sağlamanın bir yolu, π dönüşümünün tüm eşleniklere göre ortalamasını almak olabilir.

Bu fikirler ışığında, bir $\varphi : V \to V$ fonksiyonunu

$$\varphi := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \pi g$$

olarak tanımlayalım. [3] Daha açık bir şekilde görmek için φv ifadesini de yazalım:

$$\varphi v := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}(\pi(gv)) \ .$$

Bu şekilde tanımlanan φ fonksiyonu, lineer dönüşümlerin bileşkesi olduğundan kendisi de bir lineer dönüşümdür (nasıl?). Öyleyse bu φ fonksiyonunun aradığımız fonksiyon olduğunu göstererek kanıtı tamamlamak için şimdi iki şeyi ispatlamalıyız:

- φ lineer dönüşümünün grup etkisi ile uyumlu olduğunu (dolayısıyla bir FG-homomorfizmi olduğunu), ve
- $\operatorname{Im} \varphi = U$ olduğunu.

Önce ilkini ispatlayalım: Rastgele birer $x \in G$ ve $v \in V$ alalım. Bu du-

[3] Teoremdeki cisminin karakteristiğinin sıfır olması varsayımını $|G|$ ile bölme yapabilmek için, grubun sonlu olduğu varsayımını ise tanımdaki toplamın sonlu olmasını garanti etmek için kullandığımıza dikkat çekiyoruz.

rumda

$$
\begin{aligned}
x(\varphi v) &= x\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}(\pi(gv))\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(xg^{-1})(\pi(gv)) && (x \text{ 'i lineerlikle içeri aldık}) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(xg^{-1})(\pi(gx^{-1}.xv)\,) && (e = x^{-1}.x) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{hx\in G} h^{-1}(\pi(h(xv)\,)) && (h = gx^{-1} \text{ değişken değişimi}) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}(h^{-1}\pi h)(xv) && {}^{4} \\
&= \varphi(xv)
\end{aligned}
$$

olduğunu elde ediyoruz.

Şimdi $\operatorname{Im}\varphi = U$ olduğunu gösterelim. Bunun için önce rastgele bir $v \in V$ alalım. Bu durumda $\operatorname{Im}\pi = U$ olduğundan herhangi bir $g \in G$ için $\pi(gv) \in U$ sağlanır. Ayrıca U bir FG-altmodülü olduğundan grup etkisi altıda değişmezdir ve $g^{-1}(\pi(gv)) \in U$ sağlanır. Son olarak, U bir vektör altuzayı olduğundan toplama ve skaler çarpma altında kapalıdır dolayısıyla

$$\varphi v := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}(\pi(gv)) \in U$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $\operatorname{Im}\varphi < U$ olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi de rastgele bir $u \in U$ alalım. Bu durumda U bir FG-altmodülü olduğundan her $g \in G$ için $gu \in U$ olur. Öyleyse π fonksiyonu U üzerine izdüşüm

[4] $G = \{h : hx \in G\}$ olduğunu gözlemleyelim. Dolayısıyla üstteki satırda da burada da h elemanı, G grubundaki bütün elemanları tarıyor.

olduğundan $\pi(gu) = gu$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\varphi u &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}(\pi(gu))\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}(gu)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u\\ &= \frac{1}{|G|}|G|u\\ &= u\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Buradan da $U < \operatorname{Im}\varphi$ olduğu sonucuna varıyoruz. Yukarıdaki paragrafla birleştirdiğimizde, aradığımız $U = \operatorname{Im}\varphi$ sonucunu elde ediyoruz. [5]

Bu durumda, ispatın başında bahsedildiği üzere $W = \operatorname{Ker}\varphi$ seçimi için $V = U \oplus W$ biçiminde FG-modülü direkt toplam ayrışmasının varlığını hatırlatarak ispatı bitiriyoruz. $\square$

Örnek 6.1. Örnek 3.1 ve Örnek 3.2 ile devam edelim: $F = \mathbb{R}, G = C_3 = \langle a \mid a^3 = e\rangle, V = \mathbb{R}^3$ olsun. Ayrıca bir $\mathcal{B} : v_1, v_2, v_3$ tabanı için döngüsel notasyonda $\sigma = (123) \in S_3$ olmak üzere grup etkisi $av_i = v_{\sigma(i)}$ ile belirlensin. Bu FG-modülü yapısına göre

$$U = \operatorname{sp}(v_1 + v_2 + v_3)$$

kümesinin bir FG-altmodülü olduğunu daha önce görmüştük. [6]

Maschke Teoremi'nin ispatındaki yöntemi kullanarak U 'nun tümleyeni olan FG-altmodülünü inşa edelim. Bunun için önce bir W_0 tümleyen vektör altuzayı ile başlamamız lazım. Örneğin,

$$W_0 = \operatorname{sp}(v_2, v_3)$$

[5] Aslında bu iki paragrafta daha güçlü bir sonuca ulaştık: φ fonksiyonunun (π gibi) U üzerine bir izdüşüm olduğunu görmüş olduk.

[6] Bu altmodüle Örnek 3.1 ve Örnek 3.2'de, buradan farklı olarak W adını vermiştik. Burada ise Maschke Teoremi'ndeki isimlendirmeyle uyumlu olması için U ile isimlendiriyoruz.

altuzayını alabiliriz.

Soru 1. Vektör uzayı direkt toplam ayrışması olarak

$$V = U \oplus W_0$$

olduğunu gösterin.

Rastgele bir $v \in \mathbb{R}$ vektörü $\mathcal{B}$ tabanında

$$v = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

olarak yazılıyor olsun. Bu durumda v vektörünü

$$v = \underbrace{x(v_1 + v_2 + v_3)}_{\in U} + \underbrace{(y - x)v_2 + (z - x)v_3}_{\in W_0}$$

olarak ifade edebiliriz, dolayısıyla bu vektör uzayı direkt toplam ayrışmasına göre U bileşenine izdüşüm dönüşümü

$$\pi v = \pi(xv_1 + yv_2 + zv_3) = x(v_1 + v_2 + v_3)$$

olarak tanımlanır.

Şimdi π izdüşümü aracılığıyla φ adındaki FG-homomorfizmini oluşturalım. İspattaki gibi, bu fonksiyonu yukarıdaki gibi yazılmış herhangi $v = xv_1+yv_2+zv_3 \in V$ elemanına uyguladığımızda sonucun

$$\begin{aligned}
\varphi v &:= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}(\pi(gv)) \\
&= \frac{1}{3}\left[e^{-1}(\pi(ev)) + a^{-1}(\pi(av)) + (a^2)^{-1}(\pi(a^2v))\right] \\
&= \frac{1}{3}\big[e(\pi(xv_1 + yv_2 + zv_3)) + a^{-1}(\pi(zv_1 + xv_2 + yv_3)) \\
&\qquad\qquad + a^{-2}(\pi(yv_1 + zv_2 + xv_3))\big] \\
&= \frac{1}{3}\big[e(x(v_1 + v_2 + v_3)) + a^2(z(v_1 + v_2 + v_3)) + a(y(v_1 + v_2 + v_3))\big] \\
&= \frac{1}{3}\big[x(v_1 + v_2 + v_3) + z(v_3 + v_1 + v_2) + y(v_2 + v_3 + v_1)\big] \\
&= \frac{1}{3}(x + y + z)(v_1 + v_2 + v_3)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabildiği sonucuna varıyoruz. Buradan da $W = \operatorname{Ker}\varphi$ tümleyen FG-altmodülümüzü elde edebiriz:

$$\begin{aligned} W &= \operatorname{Ker}\varphi \\ &= \{v \in V : \varphi v = 0_V\} \\ &= \{xv_1 + yv_2 + zv_3 : \frac{1}{3}(x+y+z)(v_1+v_2+v_3) = 0_V\} \\ &= \{xv_1 + yv_2 + zv_3 : x+y+z = 0\} \ . \end{aligned}$$

Bu altuzayın bir FG-altmodülü olduğunu ve

$$V = U \oplus W$$

FG-modülü direkt toplam ayrışmasını verdiğini Maschke Teoremi'nden biliyoruz.

Eğer $\mathcal{B}$ tabanını standart taban olarak alırsak, bunun $V = \mathbb{R}^3$ uzayında $x+y+z = 0$ düzlemine karşılık geldiğine dikkat edelim. Bu FG-altmodülünü de aslında daha önce Örnek 3.3'te saptamıştık.

6.2 Maschke Teoremi'nin sonuçları

Maschke Teoremi ile bir FG-modülünün (kendinden ve sıfır-uzayından başka) FG-altmodülü varsa, kendinden boyut itibarıyla küçük FG-altmodüllerinin direkt toplamı olarak yazılabildiğini gördük. Eğer bir FG-modülünün (kendinden ve sıfır-uzayından başka) altmodülü yoksa bu FG-modülüne *indirgenemez* dendiğini hatırlayalım.

Bir doğal sayıyı eğer asal değilse çarpanlarına ayırdığımızı, örneğin iki sayının çarpımı olarak yazdığımızı düşünelim. Daha sonra, bu çarpanların kendilerini de eğer asal değillerse çarpanlarına ayırabiliriz. Du işleme yeterince devam edersek bir süre sonra başladığımız sayıyı asal çarpanlarına ayırmış oluruz. Aşal çarpanlar da daha küçük çarpanlara ayrılamadığından, başladığımız sayıyı çarpma işlemine göre ayrılabileceği en küçük en temel yapıtaşlarına ayırmış oluruz.

Maschke Teoremi de benzeri şekilde FG-modüllerini temel bileşenlerine ayırmakta kullanılabilir: Bir FG-modülü eğer indirgenemez değilse boyutu daha küçük FG-altmodüllerinin direkt toplamı olarak yazalım ayıralım ve bu işlemi bileşenler için tekrarlayalım. Bu işlemin yeterince tekrarlarsak, başladığımız FG-modülünün gerçekten de temel yapı taşlarına, yani bu durumda indirgenemez FG-modüllerinin direkt toplamına ayrıldığını aşağıda bir teoremde ispatlayacağız. Ama önce, arzu ettiğimiz ayrışmayı matematiksel olarak tanımlayalım:

Tanım 6.3. Eğer V adında bir FG-modülü $U_1, \ldots, U_r$ indirgenemez FG-altmodülleri için $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ şeklinde yazılabiliyorsa V, *tamamen indirgenebilirdir* denir.

Teorem 6.4. *Eğer G sonlu bir grup, $F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ise her FG-modülü tamamen indirgenebilirdir.*

Kanıt. V adında bir FG-modülü alalım. Şimdi $n = \dim V$ üzerine tümevarım ile teoremimizi ispatlayacağız.

Eğer $\dim V = 1$ ise V kendisi indirgenemezdir, dolayısıyla zaten indirgenemez FG-modüllerinin direkt toplamı formundadır.

Şimdi $n = \dim V > 1$ olduğunu ve boyutu n sayısından küçük tüm FG-modüllerinin tamamen indirgenebilir olduğunu varsayalım.

Eğer V indirgenemez ise ispat biter. Eğer V indirgenemez değilse $0 < \dim U < n$ olmak üzere U adında bir FG-altmodülü vardır. Bu durumda, Maschke Teoremi ile biliyoruz ki $V = U \oplus W$ olacak şekilde W adında bir FG-altodülü daha vardır. Bu durumda $0 < \dim W = n - \dim U < n$ sağlanır. Bu durumda tümevarım varsayımından hem U hem de W tamamen indirgenebilirdir, dolayısıyla belli indirgenemez $U_1, \ldots, U_r, W_1, \ldots, W_s$ indirgenemez FG-altmodülleri için

$$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \ , \ W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$$

olarak yazılabilirler. Bunun sonucu olarak V için

$$\begin{aligned} V &= U \oplus W \\ &= U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_s \end{aligned}$$

ayrışmasını elde ederiz, dolayısıyla V tamamen indirgenebilirdir. □

Bu teorem, herhangi bir FG-modülünün indirgenemez FG-altmodülleri cinsinden basit bir şekilde ifade edilebildiğini söylüyor. Dolayısıyla eğer indirgenemez FG-modüllerini anlayabilirsek tüm FG-modüllerini anlamakta büyük bir adım atmış.

Teorem 6.4 ve indirgenemez FG-modüllerinin asal sayılara benzerliği hemen akla şu soruyu getiriyor: Bir sayının asal çarpanlarına ayrışması (bir bakıma) tektir. Peki bir FG-modülünün indirgenemez bileşenlerine ayrışması (bir bakıma) tek midir?

Maschke Teoreminin daha basit bir diğer sonucunu daha sonra kullanmak üzere burada ispatlayarak bölümü bitiriyoruz.

Önerme 6.5. *G sonlu bir grup, $F = \mathbb{R}$ veya C olsun. V bir FG-modülü ve U ise V 'nin bir FG-altmodülü olsun. Bu durumda örten bir*

$$\varphi : V \to U$$

FG-homomorfizmi vardır.

Kanıt. Maschke Teoremi'nden biliyoruz ki V 'nin W ile ifade edilen bir FG-altmodülü için $V = U \oplus W$ sağlanır. Bu durumda ise Önerme 5.7 ile biliyoruz ki U bileşenine $\pi_U : V \to V$ izdüşümü, görüntüsü U olan bir FG-homomorfizmidir. Bu fonksiyonun görüntüsünü U 'ya sınırlayarak aradığımız φ fonksiyonunu elde ederiz. □

Bölüm 7

Schur Lemması

Geçen bölümde Maschke Teoremi aracılığıyla tüm FG-modüllerini indirgenemez FG-modülleri cinsinden yazabileceğimizi gördük. Bu bölümde ise Schur Lemması aracılığıyla bir indirgenemez FG-modülünün kendi içinde ne kadar çeşitlilik barındırabildiği sorusunu yanıtlayacağız. Böyle bir incelemeyi yapmanın doğal yolu, iki indirgenemez FG-modülü arasında (ya da bir FG-modülünden kendisine) ne kadar farklı FG-homomorfizmleri olabileceğine bakmak olabilir. İşte Schur Lemması, indirgenemez FG-modülleri arasındaki FG-homomorfizmlerinin çok çeşitlilik gösteremeyeceğini bize söyleyecek.

Schur Lemması $F = \mathbb{R}$ durumunda değil, $F = \mathbb{C}$ durumunda çalışıyor. Bu sebeple, $\mathbb{C}G$-modülleri $\mathbb{R}G$-modülleriden çok daha sade bir yapıya sahip. Bu nedenle dersin kalanında $\mathbb{C}G$-modüllerine odaklanacağız.

Önce lineer cebirden şu önermeyi hatırlayalım:

Önerme 7.1. *V bir kompleks vektör uzayı olsun. Her $\varphi : V \to V$ lineer dönüşümünün bir özdeğeri (ve dolayısıyla özvektörü) vardır.*

Bir X kümesi üzerindeki birim fonksiyonu $\mathrm{id}_X : X \to X$ ile göstereceğiz.

7.1 Schur Lemması

Teorem 7.2 (Schur Lemması)**.** *V ve W birer indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olsun.*

(1) Eğer $\varphi : V \to W$ bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmi ise ve sıfır-dönüşümü değilse (yani her $v \in V$ için $\varphi v = 0_W$ değilse) bir $\mathbb{C}G$-izomorfizmidir.

(2) Eğer $\varphi : V \to V$ bir $\mathbb{C}G$-izomorfizmi ise birim fonksiyonun bir skaler katıdır (yani bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\varphi = \lambda \operatorname{id}_V$ formundadır.)

Kanıt. (1) $\varphi : V \to W$ sıfır-dönüşümünden farklı bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmi olsun. Öyleyse $\operatorname{Ker} \varphi \neq V$ elde ederiz. Aynı zamanda V 'nin içinde $\operatorname{Ker} \varphi$ bir $\mathbb{C}G$-altmodülü olduğundan ve V indirgenemez olduğundan $\operatorname{Ker} \varphi = \langle 0_V \rangle$ olmak zorunda kalır, yani φ birebirdir.

Diğer yandan, $\operatorname{Im} \varphi$ ise W içinde bir $\mathbb{C}G$-altmodülüdür ve W da indirgenemezdir. Dolayısıyla $\operatorname{Im} \varphi \neq \langle 0_W \rangle$ olduğundan $\operatorname{Im} \varphi = W$ sonucuna varırız, yani φ örtendir.

Toparlarsak, φ hem birebir hem örten bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmidir, yani bir $\mathbb{C}G$-izomorfizmidir.

(2) Önerme 7.1 ile biliyoruz ki verilen $\varphi : V \to V$ fonksiyonu için $\varphi v = \lambda v$ denklemini sağlayan bir $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $v \in V, v \neq 0_V$ vardır. Dolayısıyla $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V) \neq \langle 0_V \rangle$ elde ederiz. $\varphi - \lambda \operatorname{id}_V$ bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmi olduğundan $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)$ altuzayının V içinde bir $\mathbb{C}G$-altmodülü olduğunu gözlemleriz. Fakat bu durumda V indirgenemez olduğundan $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V) = V$ olmak zorundadır, yani $\varphi - \lambda \operatorname{id}_V$ dönüşümünün sıfır-dönüşümü olduğu sonucuna ulaşırız. Bu ise $\varphi = \lambda \operatorname{id}_V$ olmasıyla denktir. □

Soru 1. Schur Lemması'nın ilk kısmı ve ispatı $\mathbb{R}G$-modülleri için de geçerlidir. İkinci kısma $\mathbb{R}G$-modülleri için bir ters-örnek bulun: V adında indirgenemez bir $\mathbb{R}G$-modülü ve $\varphi : V \to V$ şeklinde birim fonksiyonun skaler katı *olmayan* bir $\mathbb{R}G$-homomorfizmi örneği verin.

Soru 2. İspatlayın: Eğer V ve W birer indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü ve $\varphi : V \to W$ sıfır-dönüşümünden farklı bir $\mathbb{C}G$-izomorfizmi ise V 'den W 'ya her $\mathbb{C}G$-homomorfizmi φ 'nin bir skaler katıdır.

Schur Lemması'nın ikinci kısmının şöyle bir tersi de vardır:

Önerme 7.3. *V, sıfırdan farklı bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Eğer her $\varphi : V \to V$ şeklinde $\mathbb{C}G$-homomorfizmi id_V 'nin bir skaler katı ise V indirgenemezdir.*

Kanıt. Önermenin kontrapozitifini (karşıt-tersini) ispatlayacağız:

V indirgenebilir olsun, yani $\langle 0_V \rangle \neq U \neq V$ şartını sağlayan U adında bir $\mathbb{C}G$-altmodülü olsun. Bu durumda Önerme 6.5'teki $\mathbb{C}G$-homomorfizminin görüntüsünü genişleterek görüyoruz ki $\operatorname{Im}\varphi = U$ olmak üzere $\varphi : V \to V$ şeklinde bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmi vardır. Fakat böyle bir fonksiyon, birim fonksiyonun skaler katı olamaz çünkü birim fonksiyonun skaler katları ya (o skaler sıfır ise) sıfır-fonksiyonudur ya da (o skaler sıfır değilse) izomorfizmdir. □

Sonuç 7.4. *Bir $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ grup temsili indirgenemezdir ancak ve ancak*

$$\textit{her } g \in G \textit{ için } \ (\rho g)A = A(\rho g)$$

şartını sağlayan her $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ matrisi birim matrisin skaler katı ise.

Kanıt. Öncelikle, standart taban ile grup etkisini kullanarak $V = \mathbb{C}^3$ üzerinde grup etkisini tanımlayalım: her $v \in \mathbb{C}^3$ ve $g \in G$ için $gv := (\rho g)v$ olsun.
[1]

Şimdi $n \times n$ boyutlarında bir $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ matrisi alalım ve bu matris tarafından $v \to Av$ kuralı ile belirlenen $\mathbb{C}^3$ üzerindeki lineer dönüşümünü düşünelim. Bu bir FG-homomorfizmidir ancak ve ancak

$$\text{her } g \in G \text{ ve } v \in V \text{ için } A(gv) = g(AV)$$

[1]Buradaki notasyonda, bir $v \in \mathbb{C}^3$ vektörünü ve onun (standart tabanda) sütun matris olarak yazımını ayırmıyoruz. Daha kesin bir notasyon kullanmak istersek $[gv]_{\mathcal{S}} := (\rho g)[v]_{\mathcal{S}}$ yazabiliriz.

ise, başka bir deyişle

$$\text{her } g \in G \text{ için } A(\rho g) = (\rho g)A$$

ise. Schur Lemması ve Önerme 7.3 ile biliyoruz ki V üzerindeki tüm $\mathbb{C}G$-homomorfizmleri λ id formundadır ancak ve ancak V indirgenemez ise. Bu noktada $\mathbb{C}G$-modülü yapısından grup temsili yapısına geri dönerek aradığımız sonucu elde ediyoruz. □

Bu sonuç bize bir ρ grup temsilinin indirgenemez olup olmadığını saptamada çok pratik bir yöntem veriyor: Bütün ρg matrislerine [2] bakalım. Bu matrislerinin hepsinin birden değişmeli olduğu bir $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ matrisi bulabiliyor muyuz? Bulabiliyorsak grup temsili indirgenemez değil, bulunamaz ise indirgenemez.

Örnek 7.1. $G = C_3 = \langle a \,|\, a^3 = e \rangle$ grubunun bir $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ grup temsilini

$$\rho a = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ile tanımlayalım. Şimdi, herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ skaleri için λI_n formunda olmayan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin bütün ρg matrisleriyle değişmeli olduğunu görüyoruz, dolayısıyla ρ temsili indirgenemez değildir.

Soru 3. İndirgenemez bir örnek için kitapta sayfa 80'deki "Example 9.4(b)"yi inceleyin.

7.2 Sonlu değişmeli grupların temsilleri

Bu kısımda, sonlu değişmeli gruplarının indirgenemez kompleks temsillerini, daha doğrusu buna denk olarak indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerini sınıflandıracağız.

[2] ...ya da sadece grubu geren elemanlar için...

Önerme 7.5. *Sonlu değişmeli bir G grubunun her indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü 1 boyutludur.*

Kanıt. G grubu için V adında indirgenemez bir $\mathbb{C}G$-modülünü düşünelim. Bir $x \in G$ aldığımızda, V üzerinde her v için $v \mapsto xv$ kuralıyla tanımlı lineer dönüşümün bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmi vermesi için

$$\text{her } g \in G \text{ ve } v \in V \text{ için } x(gv) = g(xv)$$

şartının, ya da denk olarak

$$\text{her } g \in G \text{ ve } v \in V \text{ için } (xg)v = (gx)v$$

şartının sağlanması lazım. Eğer x elemanı G grubunun her elemanı ile değişmeli ise [3] bu şart otomatik olarak sağlanır. Dolayısıyla eğer grubumuz değişmeli ise de bu şartı her $x \in G$ elemanı sağlar. Bu durumdaysa, Schur Lemması'nın ikinci kısmından biliyoruz ki bu fonksiyon birim fonksiyonun bir skaler katıdır, yani her $x \in G$ için öyle bir $\lambda_x \in \mathbb{C}$ vardır ki

$$\text{her } v \in V \text{ için } xv = \lambda_x v$$

sağlanır. Fakat bu durumda V 'nin tüm altuzayları grup etkisi altında değişmez olur, dolayısıyla X indirgenemez olduğunudan aşikar olmayan altuzayı olamaz. Bu durumda $\dim V = 1$ sonucuna ulaşırız. □

Soru 4. Bu şekilde G 'den kompleks çarpımsal gruba tanımlanan

$$\begin{aligned} \lambda : G &\to \mathbb{C}^* \\ x &\mapsto \lambda_x \end{aligned}$$

fonksiyonunun bir grup homomorfizmi verdiğini gösterin.

Bu noktada, cebirden *"sonlu değişmeli grupların temel teoremi"*ni hatırlıyoruz:

Teorem 7.6. *Her sonlu değişmeli grup, sonlu devirli grupların bir direkt çarpımına izomorfiktir.*

[3]Bu şart $x \in Z(G)$ ile denktir, sonraki sayfalarda göreceğiz.

Bu teoreme dayanarak, $n_1, \ldots, n_r$ birer pozitif tamsayı olmak üzere bir

$$G = C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}$$

sonlu değişmeli grubu alalım. Her bir C_i grubunun bir üretecini c_i olarak isimlendirelim. Bu durumda bütün C_i gruplarının birim elemanları e ile gösterilmek üzere, her bir $i = 1, \ldots, r$ için $g_i \in G$ elemanını

$$g_i = (e, \ldots, \underbrace{c_i}_{\substack{i \text{ 'inci} \\ \text{girdi}}}, \ldots, e)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$G = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$$

olduğunu görüyoruz. Hatta, grup sunumu olarak

$$G = \langle g_1, \ldots, g_r \mid \text{ her } 1 \leqslant i, j \leqslant r \text{ için } g_i^{n_i} = e \text{ ve } g_i g_j = g_j g_i \rangle$$

düşünülebilir. Şimdi, bir $\rho : G \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ indirgenemez grup temsili alalım. Önerme 7.5 ile biliyoruz ki belli $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sayıları için

$$\rho g_i = \left[\ \lambda_i \ \right]$$

şeklinde 1×1 boyutlu matrisler elde edilir. Ayrıca $g_i^{n_i} = e$ olduğundan $\lambda_i^{n_i} = 1$ sağlanmalıdır, yani her bir λ_i kompleks sayısı 1 'in n_i 'inci köklerinden biri olmalıdır.

> *Soru 5.*
> 1'in n 'inci köklerinin
>
> $$\omega = e^{k \frac{2\pi}{n} i} \ , \ k = 0, \ldots, n-1$$
>
> sayıları olduğunu ve bu sayıların kompleks düzlemde birim çember üzerine, bir köşesi $z = 1$ sayısında olan bir düzgün n-genin köşeleri olacak şekilde dizildiğini hatırlayın.

Böylece, herhangi $g = g_1^{j_1} \dots g_r^{j_r} \in G$ grup elemanı için

$$\rho g = \rho(g_1^{j_1} \dots g_r^{j_r}) = \left[\ \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_r^{j_r}\ \right]$$

olduğunu gözlemliyoruz. Sonuç olarak görüyoruz ki her $i = 1, \dots, r$ için birer λ_i şeklinde isimlendirilmiş 1 'in n_i 'inci kökünü seçerek belirliyoruz, ve bu λ_i seçimlerden her biri bize farklı bir ρ indirgenemez temsili veriyor. Bu temsili

$$\rho = \rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$$

olarak isimlendirelim. Her bir λ_i sayısı n_i farklı şekilde seçilebildiğinden toplamda $n_1 \dots n_r$ çarpımı kadar, yani tam olarak $|G|$ adet farklı ρ indirgenemez temsili elde ederiz.

Bu sonuçları aşağıdaki teoremde özetleyelim.

Teorem 7.7. *Bir $G = C_{n_1} \times \dots \times C_{n_r}$ sonlu değişmeli grubunu alalım. Yukarıda tarif edilen $\rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ indirgenemez temsillerinin derecesi* 1 *'dir ve bunlardan tam olarak $|G|$ adet vardır. Ayrıca, G grubunun indirgenemez herhangi bir temsili bu temsillerden tam olarak ve sadece bir tanesine denktir.*

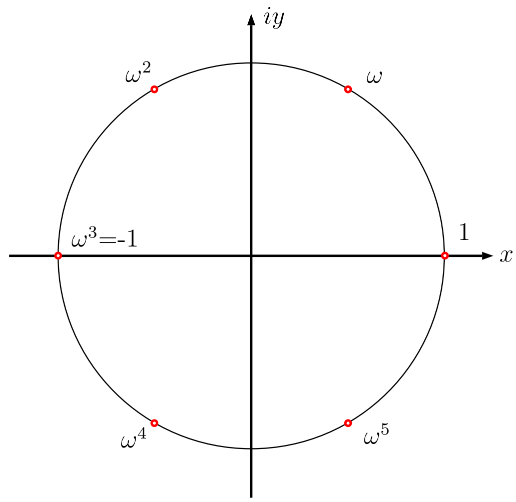
Örnek 7.2. $G = C_6 = \langle a \,|\, a^6 = e \rangle$ grubunu düşünelim. Yukarıdaki tartışmaya ve teoreme göre, bu grubun herhangi bir indirgenemez ρ adlı temsilinin derecesi 1 olmalı. Dolayısıyla, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı 1 'in 6 'ncı köklerinden biri olmak üzere, bu temsil

$$\begin{aligned} \rho = \rho_\lambda : G &\to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \\ a &\mapsto [\lambda] \end{aligned}$$

formunda olmalı. Bu şartı sartı sağlayan lambda değerleri $\omega = e^{\frac{\pi}{3} i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ olmak üzere

$$1, \omega, \omega^2, \underbrace{\omega^3}_{-1}, \omega^4, \omega^5$$

sayılarından biri olmalıdır. Bu sayıları şu şekilde görebiliriz:



G grubunun herhangi bir indirgenemez temsili bu 6 temsilden birine denktir.

7.3 Köşegenleştirme

H grubu, merkebesi n olan ve bir g elemanı tarafından üretilen devirli grup olsun. Bu grubun sunumu

$$H = \langle g \,|\, g^n = e \rangle$$

olarak verilebilir. Bu grup için V adlı bir $\mathbb{C}H$-modülü düşünelim. Teorem 6.4 ile biliyoruz ki belli indirgenemez $U_1, \ldots, U_r$ adlı $\mathbb{C}H$-altmodülleri için V 'nin bir

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

direkt toplam ayrtışması vardır. Teorem 7.7 ile biliyoruz ki her bir U_i altuzayı 1 boyutludur. U_i altuzayını geren bir vektöre u_i adını verelim, yani $U_i = \mathrm{sp}(u_i)$ olsun. Şimdi, $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, her bir i indeksi için

$$gu_i = \omega^{m_i} u_i$$

olacak şekilde m_i sayıları vardır. Buradan da $\mathcal{B} : u_1, \ldots, u_r$ tabanında grubun g elemanının etkisini veren lineer dönüşümün $\mathcal{B}$ tabanında ifadesinin

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \omega^{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega^{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{m_r} \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

köşegen matrisiyle verildiğimi görüyoruz. Bu gözlemi biraz genişleterek aşağıdaki sonuca ulaşıyoruz:

Önerme 7.8. *G bir sonlu grup ve V bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Her $g \in G$ elemanı için $[g]_{\mathcal{B}}$ matrisinin köşegen olacağı şekilde V uzayının bir $\mathcal{B}$ tabanı bulunabilir. Eğer g elemanının mertebesi n ise bu matrisin köşegeni üzerindeki sayılar, 1 'in n 'inci kökleri olacaktır.*

Kanıt. G grubunun içinde g tarafından üretilen $H = \langle g \rangle$ altgrubunu alalım. H sonlu devirli olduğundan ve V aynı zamanda bir $\mathbb{C}H$-modülü olacağından, yukarıdaki tartışma ile bir $\mathcal{B}$ tabanında $[g]_{\mathcal{B}}$ matrisi Denklem 7.1 formunda olacaktır. □

7.4 Merkezler ve Schur Lemması

Bir grupta, gruptaki bütün elemanlarla değişmeli olan elemanlara *grubun merkezi* dendiğini hatırlayalım:

Tanım 7.9. Bir G grubunun *merkezi*

$$\mathrm{Z}(G) := \{z \in G : \text{her } g \in G \text{ için } zg = gz\}$$

olarak tanımlanır.

Soru 6. $\mathrm{Z}(G)$ 'nin, G 'nin bir normal altgrubu olduğunu gösterin.

Soru 7. G değişmeli ise $\mathrm{Z}(G) = G$ olduğunu gösterin.

Benzeri şekilde bir grup cebiri için de, bu grup cebirinin her elemanıyla değişmeli olan elemanları kümesine o grup cebirinin merkezi diyoruz:

Tanım 7.10. G bir grup, F bir cisim olsun. FG grup cebirinin *merkezi*

$$\mathrm{Z}(FG) := \{z \in FG : \text{her } r \in FG \text{ için } zr = rz\}$$

olarak tanımlanır.

Soru 8. G değişmeli ise $\mathrm{Z}(FG) = FG$ olduğunu gösterin.

FG içinde G grubunun merkezinden gelen (yani $\mathrm{Z}(G)$ elemanlarının lineer bileşkesi olarak yazılabilen) tüm elemanlar, yani $F[\mathrm{Z}(G)]$ grup cebirinin elemanları, FG 'nin merkezinin içinde kalır.

Soru 9.

$$F[\mathrm{Z}(G)] = \left\{ \sum_{g \in \mathrm{Z}(g)} \lambda_g g : \lambda_g \in F \right\} \subseteq FG$$

olmak üzere $F[\mathrm{Z}(G)] \subseteq \mathrm{Z}(FG)$ olduğunu gösterin.

Sıradaki örnekte göreceğimiz üzere, FG 'nin merkezinin tüm elemanları bu şekilde grubun merkezinden gelmeyebilir.

Örnek 7.3. G grubu 3 eleman üzerine 6 elemanlı dihedral grup, yani

$$\begin{aligned} G = D_6 &= \left\langle a, b \,|\, a^3 = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle \\ &= \left\langle a, b \,|\, a^3 = b^2 = e, bab = a^2 \right\rangle \end{aligned}$$

olarak verilmiş olsun (Bu grup S_3 ile izomorfiktir).

Şimdi $F = \mathbb{C}$ alalım. Bu durumda $z = e + a + a^2 \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ olur. Bunu görmek için şu gözlemler yeterlidir:

$$\begin{aligned} az &= a(e + a + a^2) \\ &= a + a^2 + a^3 \\ &= (e + a + a^2 a) \\ &= za \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bz &= b(e + a + a^2) \\ &= b + ba + ba^2 \\ &= b + a^2 b + ab && (ba = a^2 b, ba^2 = ab) \\ &= (e + a^2 + a)b \\ &= zb \end{aligned}$$

Bu gözlemlerin yeterliliğini, iki kısma ayrılarak aşağıda egzersiz olarak veriyoruz.

Soru 10. $r \in FG$ olsun.

- Eğer $G = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ ve her $i = 1, \ldots, k$ için $rg_i = g_i r$ ise, her $g \in G$ için $rg = gr$ olduğunu gösterin.
- Eğer her $g \in G$ için $rg = gr$ ise $r \in \mathrm{Z}(FG)$ olduğunu gösterin.

Bu sorudaki iki önerme birlikte düşünüldüğünde, bir $r \in FG$ elemanın G grubunun üreteçleriyle değişmeli olmasının grup cebirinin merkezinde kalması için yeterli olduğunu söylemektedir.

Normal altgruplar, grup cebirinin merkez elemanlarını elde etmede bize yardımcı olur:

Önerme 7.11. *G sonlu bir grup, H ise G içinde normal altgrup olsun. Bu durumda, H 'nin elemanlarının toplamı grup cebirinin içinde kalır, yani*

$$r = \sum_{h \in H} h \in \mathrm{Z}(FG)$$

Kanıt. Herhangi $g \in G$ alalım. $H \lhd G$ olduğundan

$$H = g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg : h \in H\}$$

olduğunu hatırlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} g^{-1}rg &= g^{-1}\left(\sum_{h \in H} h\right) g \\ &= \sum_{h \in H} g^{-1}hg \\ &= \sum_{h \in H} h \\ &= r \end{aligned}$$

elde ederiz. bu da $rg = gr$ ile denktir. □

Schur Lemması'nı kullanarak grup cebirlerinin merkezi ile ilgili sıradaki önemli önerme ile şunu görüyoruz: Bir grubun kompleks grup cebirinden bir $z \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ elemanı aldığımızda, $v \mapsto zv$ lineer dönüşümü bir λ ile skaler çarpmadır.

Önerme 7.12. *V bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü ve $z \in \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ olsun. Öyle bir $\lambda \in \mathbb{C}$ skaleri vardır ki*

$$\text{her } v \in V \text{ için } zv = \lambda v \tag{7.2}$$

sağlanır.

Kanıt. Her $g \in G \subset \mathbb{C}G$ için $gz = zg$ olduğundan her $v \in V$ için

$$g(zv) = z(gv)$$

sağlanır, dolayısıyla $v \mapsto zv$ lineer dönüşümü V üzerinde bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmidir, dolayısıyla Schur Lemması'nın ikinci kısmından görüyoruz ki id_V fonksiyonunun bir skaler katıdır. □

Bu şekilde her $z \in \mathrm{Z}[\mathbb{C}G]$ için Denklem 7.2 ile belirlenen λ skalerini λ_z ile gösterelim.

Soru 11. V bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Grubun merkezinden kompleks çarpımsal gruba tanımlanan

$$\begin{aligned}\lambda : \mathrm{Z}(G) &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \lambda_z\end{aligned}$$

fonksiyonunun bir grup homomorfizmi olduğunu gösterin.

Not. Bu sorudaki homomorfizmin, Soru 4'teki homomorfizmin bir genellemesi olduğu görülebilir.

Soru 12. V bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olsun. *Grup cebirinin* merkezinden kompleks sayılara tanımlanan

$$\begin{aligned}\lambda : \mathrm{Z}(\mathbb{C}G) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \lambda_z\end{aligned}$$

fonksiyonunun bir halka homomorfizmi olduğunu gösterin.

Eğer bir FG-modülü için herhangi bir tabanla elde edilen grup temsili için $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, F)$ temsil fonksiyonu birebirse bu FG-modülüne ve ilgili grup temsiline *sadık* dendiğini hatırlayalım.

Önerme 7.13. *Eğer bir sadık ve indirgenemez* $\mathbb{C}G$*-modülü varsa* $\mathrm{Z}(G)$ *devirlidir.*

Kanıt. V sadık ve indirgenemez bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Eğer $z \in \mathrm{Z}(G) \subset \mathrm{Z}(\mathbb{C}G)$ ise Önerme 7.11 ile biliyoruz ki

$$\text{her } v \in V \text{ için } zv = \lambda_z v$$

olacak şekilde bir $\lambda_z \in \mathbb{C}$ skaleri vardır. Ayrıca $\mathbb{C}$-modülümüz sadık olduğundan Soru 11 ile verilen

$$\begin{aligned}\lambda : \mathrm{Z}(G) &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \lambda_z\end{aligned}$$

grup homomorfizmi birebirdir, yani bir monomorfizmdir. Sonuç olarak bu fonksiyonun, grubun merkezi ile bu monomorfizmin görüntüsü arasında

$$\mathrm{Z}(G) \cong \{\lambda_z : z \in \mathrm{Z}(\mathbb{C})\}$$

şeklinde bir izomorfizm verdiğini görürüz. Bu izomorfizmin sağ tarafı, kompleks çarpımsal grubun bir sonlu altgrubudur dolayısıyla devirlidir (bkz. Soru 13). $\square$

Örnek 7.4. Bu önerme ile, G grubu devirli ise $\mathrm{Z}(G) = G$ olacağından devirli olmayan bir değişmeli grup için sadık indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü ve dolayısıyla sadık indirgenemez bir kompleks grup temsili olamayacağını görüyoruz. Örneğin sadece dört elemanlı $C_2 \times C_2$ grubunun hiç sadık kompleks temsili olamayacağı sonucuna ulaşmış olduk.

Soru 13. $G < \mathbb{C}^*$ ve G sonlu olsun.

1. G 'nin elemanlarının birim çember üzerinde olduğunu gösterin.
2. $\alpha = \min\{\theta \in \mathbb{R}^+ : e^{i\theta} \in G\}$ olsun. $G = \langle e^{i\alpha} \rangle$ olduğunu gösterin.

Bölüm 8

İndirgenemez Modüller ve Grup Cebiri

Maschke Teoremi ile, herhangi bir FG-modülünün indirgenemez FG-altmodülleri cinsinden yazılabileceğini görmüştük, dolayısıyla dikkatimiz artık bir grubun indirgenemez FG-modüllerinin (ve dolayısıyla F cismi üzerinde indirgenemez grup temsillerinin) ne olduğu sorusuna odaklanmış durumda.

Bu bölümün önemli teoremi ile; bir sonlu G grubu için *herhangi bir* indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünün, bu grubun $\mathbb{C}G$ ile gösterdiğimiz grup cebirin bir $\mathbb{C}G$-altmodülüne izomorfik olacağını göreceğiz. Dolayısıyla, sonlu bir G grubunun tüm indirgenemez $\mathbb{C}G$-altmodüllerini bulmak için grup cebirine bakmanın yeterli olduğunu anlayacağız.

Genel olarak grup cebirini indirgenemez $\mathbb{C}G$-altmodüllerine ayırmak kolay olmadığından tüm indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerini bu yolla bulmaya çalışmayacağız. Bununla birlikte, bu teoremin şöyle bir kritik sonucunu hemen gözlemleyebiliriz: Her sonlu G grubunun izomorfik olmayan sadece sonlu sayıda $\mathbb{C}G$-modülü vardır. [1]

[1] Başka bir ifadeyle, sonlu adet indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü izomorfizm sınıfı vardır.

8.1 Grup cebirinin indigenemez altmodülleri

Önerme 8.1. *V ve W birer FG-modülü ve $\varphi : V \to W$ bir FG-homomorfizmi olsun. Bu durumda*

$$V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus U \qquad \text{ve} \qquad U \cong \operatorname{Im}\varphi$$

olacak şekilde V 'nin U adlı bir FG-altmodülü vardır.

Kanıt. $\operatorname{Ker}\varphi$ 'nin V 'de bir FG-altmodülü olduğunu Önerme 5.2 ile biliyoruz. Dolayısıyla Maschke Teoremi 6.2 bize

$$V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus U$$

olacak şekilde V 'nin bir U adlı FG-altmodülü olduğunu veriyor.

φ fonksiyonunun tanım kümesini U'ya, değer kümesini $\operatorname{Im}\varphi$ 'ye sınırlayarak $\widetilde{\varphi} : U \to \operatorname{Im}\varphi$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Bu fonksiyon bir FG-homomorfizminin bir FG-altmodülüne kısıtlaması olduğundan kendisi de bir FG-homomorfizmidir.

Bir $u \in \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$ alalım. Bu durumda $\varphi u = \widetilde{\varphi} u = 0_W$ elde ederiz, yani $u \in \operatorname{Ker}\varphi$ elde ederiz. Öyleyese $V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus U$ ve $u \in \operatorname{Ker}\varphi \cap U$ olduğundan $u = 0_V$ sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla $\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi} = \langle 0_V \rangle$ olduğunu, yani $\widetilde{\varphi}$ dönüşümünün birebir olduğunu görürüz.

Şimdi rastgele bir $w \in \operatorname{Im}\varphi$ alalım. Bu durumda $\varphi v = w$ olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. $V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus U$ oldunundan $v = k + u$ olacak şekilde birer $k \in \operatorname{Ker}\varphi$ ve $u \in U$ bulabiliriz. Bu eşitliğin iki tarafına da φ fonksiyonunu uygularsak

$$\begin{aligned}
\varphi v &= \varphi k + \varphi u \\
w &= 0_W + \widetilde{\varphi} u \\
w &= \widetilde{\varphi} u
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz ve $w \in \operatorname{Im}\widetilde{\varphi}$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla $\operatorname{Im}\widetilde{\varphi} = \operatorname{Im}\varphi$ sonucuna varırız ve $\widetilde{\varphi}$ dönüşümünün örten olduğunu görürüz.

Toparlarsak, $\widetilde{\varphi} : U \to \operatorname{Im}\varphi$ birebir ve örten bir FG-homomorfizmidir, yani bir FG-izormorfizmidir. Sonuç olarak, U ile $\operatorname{Im}\varphi$ izomorfiktir. $\square$

Önerme 8.2. *V bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun ve*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

şeklinde indirgenemez $\mathbb{C}G$-altmodüllerinin direkt toplamı olarak yazılsın. Bu durumda, U eğer V 'nin bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-altmodülü ise bir $j \in \{1, \ldots, s\}$ için $U \cong U_j$ sağlanır.

Kanıt. Önermede verilen direkt toplam ayrışmasında U_i üzerine izdüşüme π_i diyelim.

Sıfırdan farklı bir $u \in U$ alalım. Bu durumda bir j indeksi için $\pi_j u \neq 0_V$ olacaktır (neden?). Bu π_j dönüşümünün tanım kümesini U 'ya, değer kümesini ise U_j 'ye kısıtlayarak

$$\widetilde{\pi}_j : U \to U_i$$

$\mathbb{C}G$-homomorfizmini elde edelim. $\widetilde{\pi}_j u = \pi_j u \neq 0_V$ olduğundan

$$\operatorname{Ker} \widetilde{\pi}_j \neq U, \ \operatorname{Im} \widetilde{\pi}_j \neq \langle 0_V \rangle \subset U_j$$

elde ederiz. Bu durumda, hem U hem de U_j indirgenemez olduğundan

$$\operatorname{Ker} \widetilde{\pi}_j = \langle 0_V \rangle \, , \ \operatorname{Im} \widetilde{\pi}_j = U_j$$

sonucuna ulaşırız, yani $\widetilde{\pi}_j : U \to U_j$ birebir ve örtendir. Sonuç olarak, $\widetilde{\pi}_j$ fonksiyonu U ile U_j arasında bir izomorfizmdir. □

Not. U, bir U_i 'lerden birine *izomorfik* olmak zorundadır ama *eşit* olmak zorunda değildir! (bkz. kitap sayfa:92 example:10.3)

Bu önerme ile şunu görüyoruz: Elimizde bir $\mathbb{C}G$-modülü varsa, tam olarak hangi indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin bir direkt toplam ayrışmasında görünebilip görünemeyeceğini bilebiliriz. Yani indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri, asal çarpanlar gibi iş görür: bir doğal sayı verildiğinde o sayının asal çarpanlara herhangi bir ayrışmasında, bir asal sayının görünüp görünmeyeceği bellidir. Bu fikir ve önceki önermeden ilhamla sıradaki tanımı yapıyoruz:

Tanım 8.3. (1) V bir $\mathbb{C}G$-modülü ve U indirgenemez bir $\mathbb{C}G$-modülü olmak üzere, eğer V 'nin U ile izomorfik bir $\mathbb{C}G$-altmodülü varsa U 'ya V 'nin bir *indirgenemez bileşeni* [2] denir.

(2) Eğer V ve W adlı $\mathbb{C}G$-modüllerinin ikisinin de indirgenemez bileşeni olan bir $\mathbb{C}G$-modülü varsa buna $\mathbb{C}G$-modüllerinin *ortak indirgenemez bileşeni* denir.

$\mathbb{C}G$ 'nin grup cebiri olmak yanında bir $\mathbb{C}G$-modülü yapısına da sahip olduğunu ve bu $\mathbb{C}G$-modülüne *düzenli* $\mathbb{C}G$*-modülü* dendiğini hatırlayalım. Bu terminolojiyle bölümün ana sonucunu sıradaki teoremde ifade ediyoruz.

Teorem 8.4. *Her indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü, düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün bir indirgenemez bileşenidir.*

Kanıt. Düzenli $\mathbb{C}G$-modülü $U_1, \ldots, U_s$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin direkt toplamı olarak

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

şeklinde ifade edilmiş olsun ve ayrıca bir W indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü verilsin. Teoremi ispatlamak için göstermemiz gereken, bir $j = 1, \ldots, s$ için $W \cong U_j$ olduğudur.

Sıfırdan farklı bir $w \in W$ elemanı seçelim ve

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}G &\to W \\ r &\mapsto rw \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$\varphi e = ew = w \neq 0_W$$

olduğundan $\operatorname{Im}\varphi \neq \langle 0_W \rangle$ olduğunu görürüz, dolayısıyla W indirgenemez olduğundan $\operatorname{Im}\varphi = W$ elde ederiz.

Önerme 8.1 ile biliyoruz ki

$$\mathbb{C}G = \operatorname{Ker}\varphi \oplus U \qquad \text{ve} \qquad U \cong \operatorname{Im}\varphi = W$$

[2] ing. *composition factor*

olacak şekilde $\mathbb{C}G$ 'nin U adında bir $\mathbb{C}G$-altmodülü vardır. Fakat Önerme 8.2 ile biliyoruz ki bir j indeksi için $U \cong U_j$ olmalıdır. Bu iki sonucu birleştirerek aradığımız $W \cong U \cong U_j$ sonucunu elde ederiz. $\square$

Sonuç 8.5. *Her G sonlu grubu için izomorfik olmayan sonlu sayıda indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü vardır.*

Burada tekrar asal sayılar ile indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri arasında düşündüğümüz benzerliği hatırlayalım. Bu noktada benzerliğin bir açıdan bozulduğunu görüyoruz: sonsuz sayıda asal sayı olmasına karşın sonlu bir grup için sadece sonlu sayıda $\mathbb{C}G$-modülü vardır. [3]

Örnek 8.1. $G = C_3 = \langle a \mid a^3 = e \rangle$ grubunun kompleks grup cebirinin

$$\mathbb{C}G = \{\lambda_1 e + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 : \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, 2\}$$

olarak yazılabileceğini hatırlayalım. Şimdi, $\omega = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v_0 &= e + a + a^2 \\ v_1 &= e + \omega a + \omega^2 a^2 \\ v_2 &= e + \omega^2 a + \omega a^2 \end{aligned}$$

vektörleri için

$$U_0 = \mathrm{sp}(v_0), U_1 = \mathrm{sp}(v_1), U_2 = \mathrm{sp}(v_2)$$

altuzaylarını tanımlayalım.

Soru 1. Bu altuzayların $\mathbb{C}G$-altmodülü olduğunu gösterin.

Soru 2. Bu altuzayların lineer bağımsız olduğunu gösterin.

Bunlara ek olarak boyut toplamı da tuttuğundan (nasıl?)

$$\mathbb{C}G = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2$$

şeklinde indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri direkt toplam ayrışmasına ulaşırız.

[3] Bu açıdan düşününce, $\mathbb{C}G$-modülleri doğal sayılardan daha kolay!

Bu bilgiler ışığında

$$\begin{aligned} &U_0 \text{ için:} \qquad && av_0 = v_0 \ , \\ &U_1 \text{ için:} \qquad && av_1 = \omega^2 v_1 \ , \\ &U_2 \text{ için:} \qquad && av_2 = \omega v_2 \end{aligned}$$

olduğunu gözlemleyelim. Bu eşitlikler, bu indirgenemez $\mathbb{C}G$-altmodüllerini karakterize eder: Her biri grubun üreteçinin, vektör uzayındaki vektörleri kaç katına gönderdiğini verir. Şimdi Teorem 8.4 ile görüyoruz ki $G = C_3$ için herhangi $\mathbb{C}G$-modülü, bu üç indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünden birine izomorfiktir.

Soru 3. Önceki örnekteki vektörlerin ve sayıların nereden geldiğini anlamak için a 'nın $V = \mathbb{C}G$ üzerindeki etkisini $\mathcal{B} : e, a, a^2$ tabanında veren $[a]_{\mathcal{B}}$ matrisini yazın ve özdeğer/özvektörlerini bulun (yani: köşegenleştirin.)

Örnek 8.2. Şimdi de

$$G = S_3 = D_6 = \left\langle a, b \,|\, a^3 = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$$

üç eleman üzerinde simetrik grup (ya da, üç eleman üzerinde dihedral grup) için grup cebirinin indirgenemez ayrışmasını inceleyelim.

Tekrar, $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ olsun. $\mathbb{C}G$ içinde

$$\begin{aligned} v_0 &= e + a + a^2 \ , \qquad & w_0 &= v_0 b \ , \\ v_1 &= e + \omega a + \omega^2 a^2 \ , \qquad & w_1 &= v_1 b \ , \\ v_2 &= e + \omega^2 a + \omega a^2 \ , \qquad & w_2 &= v_2 b \end{aligned}$$

vektörlerini tanımlayalım. Bu vektörler aracılığıyla

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathrm{sp}(v_0 + w_0) \\ U_2 &= \mathrm{sp}(v_0 - w_0) \\ U_3 &= \mathrm{sp}(v_1, w_2) \\ U_4 &= \mathrm{sp}(v_2, w_1) \end{aligned}$$

altuzaylarını tanımlayalım. Bu altuzaylar birer $\mathbb{C}G$-altmodülüdür (bkz Soru. 4) ve $\mathbb{C}G$ grup cebiri, bir $\mathbb{C}G$-modülü olarak

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$$

şeklinde indirgenemez bileşenlerine ayrılır. Bunlardan 1-boyutlu olan U_1 ve U_2 izomorfik değildir, fakat 2-boyutlu olan U_3 ve U_4 izomorfiktir.

Böylece $G = S_3$ grubu için ikisi 1-boyutlu, biri 2-boyutlu olmak üzere temelde üç çeşit indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olduğunu, herhangi bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünün bu üçünden birine izomorfik olacağını görüyoruz.

Soru 4. Örnek 8.2 içinde tanımlanan U_1, U_2, U_3, U_4 altuzaylarına bakalım.

1. U_1 altuzayının bir $\mathbb{C}G$-altmodülü olduğunu gösterin.
   (U_2 için de benzeri ispat işe yarar.)
2. U_3 altuzayının bir $\mathbb{C}G$-altmodülü olduğunu gösterin.
   (U_4 için de benzeri ispat işe yarar.)
3. U_3 'ün indirgenemez olduğunu gösterin.
4. U_1 ve U_2 'nin $\mathbb{C}G$-modülü olarak izomorfik *olmadıklarını* gösterin.
5. U_3 ve U_4 'ün $\mathbb{C}G$-modülü olarak izomorfik *olduklarını* gösterin.

Bölüm 9

Grup Cebirinde İndirgenemez Bileşen Sayıları

Önceki bölümden biliyoruz ki, bütün indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri, düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$$

indirgenemez direkt toplam ayrışması içinde U_i 'lerden en az biri olarak [1] görülür. Bu bölümde şu soruyu cevaplayacağız: Peki kaç kere görülür? Başka bir deyişle, bu indirgenemez U_i 'lerden kaç tanesi elimizdeki indirgenemez bileşen ile izomorfiktir?

İndirgenemez bileşen ayrışması ile asal çarpan ayrışması arasında kurduğumuz benzetmeyi hatırlayacak olursak, bu soru asal çarpanlara ayırmada bir asal sayının kaç kere kullanıldığı (ya da, o asal sayının üssünün kaç olduğu) sorusuna karşılık geliyor.

Söz konusu sayma işlemi için, temel olarak $\mathbb{C}G$-modülleri arasındaki $\mathbb{C}G$-homomorfizmlerinin oluşturduğu vektör uzayının boyutunu kullanacağız.

Tanım 9.1. V ve W birer $\mathbb{C}G$-modülü olsun. V 'den W 'ya olan bütün $\mathbb{C}G$-homomorfizmleri kümesini $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ olarak tanımlıyoruz.

[1] izomorfizm anlamında

Bu kümenin elemanlarının aynı zamanda V 'den W 'ya lineer dönüşüm olduklarına dikkat edelim. Dolayısıyla, lineer dönüşümler gibi bunları da toplayabilir ve bir skalerle çarpabiliriz: $\varphi, \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için toplama ve skaler çarpma, lineer dönüşümlerde olduğu gibi her $v \in V$ vektöründe

$$(\varphi + \theta)v := \varphi v + \theta v$$
$$(\lambda\varphi)v := \lambda(\varphi v)$$

ile tanımlanır.

Soru 1. $\varphi+\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ ve $\lambda\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$ olduğunu gösterin.

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)$, bu işlemlerle bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Schur Lemması'nı, yani indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri arasında pek çeşitli $\mathbb{C}G$-homomorfizmi olamayacağı sonucunu bu yeni vektör uzayı ile şöyle ifade edebiliriz:

Önerme 9.2. *V ve W indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri için*

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \begin{cases} 1, & \textit{eğer } V \cong W \textit{ ise} \\ 0, & \textit{eğer } V \ncong W \textit{ ise} . \end{cases}$$

Kanıt. İkinci satır Schur Lemması'nın ilk kısmının bir başka ifadesidir. İlk satır ise Bölüm 7 Soru 2 ile denktir. □

Sıradaki önerme için, bir $\mathbb{C}G$-modülünün *indirgenemez bileşenlerinin*, indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü ayrışmasındaki her bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü (ya da bunların izomorfik kopyası) olduğunu hatırlayalım.

Önerme 9.3. *Eğer V ve W adlı $\mathbb{C}G$-modülleri için* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \neq \langle 0 \rangle$ *ise V ve W ortak indirgenemez bileşene sahiptir.*

Kanıt. $\varphi : V \to W$ sıfır-fonksiyonundan farklı bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmi olsun. Önerme 8.1 ile görüyoruz ki

$$V = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus U \qquad \text{ve} \qquad U \cong \mathrm{Im}\,\varphi \neq \langle 0_W \rangle$$

olacak şekilde V 'nin U adında bir $\mathbb{C}G$-altmodülü vardır. Bu önermenin ispatından da görüyoruz ki bu fonksiyonun kısıtlaması olan $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonu, U ile $\operatorname{Im}\varphi$ arasında bir $\mathbb{C}G$-izomorfizmidir. Şimdi U 'nun bir indirgenemez bileşenini alalım. Sonuç olarak, $\widetilde{\varphi}$ altında bu indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünün izomorfik görüntüsü $\operatorname{Im}\varphi$ 'nin, dolayısıyla da W 'nun bir indirgenemez bileşenidir. $\square$

Önerme 9.4. *V, V_1, V_2 ile W, W_1, W_2 birer $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Bu durumda*

(1) $\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)) = \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)) + \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2))$

(2) $\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)) = \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1, W)) + \dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_2, W))$

Kanıt. (1) $\pi_1 : W_1 \oplus W_2 \to W_1$ ve $\pi_2 : W_1 \oplus W_2 \to W_2$ fonksiyonlarını izdüşüm fonksiyonları [2] olarak her $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ için

$$\pi_1(w_1 + w_2) = w_1, \quad \pi_2(w_1 + w_2) = w_2$$

şeklinde tanımlayalım. Bu ikisinin, bir $\mathbb{C}G$-modülü direkt toplamında izdüşüm olmaları nedeniyle birer $\mathbb{C}G$-homomorfizmi olduklarını biliyoruz.

Herhangi bir $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ fonksiyonu için $\pi_1 \circ \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)$ ve $\pi_2 \circ \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ olacağını gözlemleyelim.

$$\begin{tikzcd}
 & & W_1 \\
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[urr, bend left, "\pi_1 \circ \varphi"] \arrow[drr, bend right, "\pi_2 \circ \varphi"'] & W_1 \oplus W_2 \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
 & & W_2
\end{tikzcd}$$

Şimdi, bu bileşke alma işlemini kullanarak $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ vektör uzayından $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1)$ ve $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ vektör uzayları dış direkt toplamına

$$F : \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$$

[2]Kesin konuşmak gerekirse, bu fonksiyonlar izdüşüm fonksiyonlarının değer kümelerinin kısıtlanmasıyla elde edilir.

lineer dönüşümünü

$$F(\varphi) := (\pi_1 \circ \varphi, \pi_2 \circ \varphi)$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu lineer dönüşümün

$$G : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$$

şeklinde tersinin

$$G(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2$$

ile tanımlanan fonksiyon olduğunu görüyoruz (kontrol edin!). Dolayısıyla $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ ve $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ vektör uzayları izomorfiktir. Buna ek olarak $\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ olduğundan aradığımız sonucu elde ederiz.

(2) Bu kısmın ispatı da ilk kısma benzemektedir.

Soru 2. Kısım (2)'nin ispatını yapın.

□

Bu iki önermeyi sonlu direkt toplamlara kolaylıkla şu şekilde genelleyebiliriz:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s)) = \sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W_j)) \tag{9.1}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W)) \ . \tag{9.2}$$

Böylece $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}$ operatörünün, direkt toplamın her iki bileşeninin boyutları üzerinde de toplamsal olduğunu görürüz. Bu iki ifadeyi de şu şekilde bir araya getirerek $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}$ operatörünün direkt toplamların boyutlarına nasıl davrandığını tam olarak özetleyebiliriz:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s)) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)) \ .$$

Bu sonucu $\mathbb{C}G$-modüllerinden biri indirgenemez iken, diğeri ise bir direkt toplamsal $\mathbb{C}G$-modülü ayrışması formundayken uygulayarak sıradaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 9.5. *V adlı bir $\mathbb{C}G$-modülü*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

biçiminde indirgenemez $U_1, \ldots, U_s$ adlı $\mathbb{C}G$-modüllerinin direkt toplamı olarak ifade edilsin ve W ise bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Bu durumda hem $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, V))$ *hem de* $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W))$*, V 'nin bileşeni olan U_i 'lerden W ile izomorfik olanların sayısına eşittir.*

Kanıt. Denklem 9.1 ve ile görüyoruz ki

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_1 \oplus \cdots \oplus U_r)) = \sum_{j=1}^{s} \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_j))$$

sağlamıyor. İndirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri üzerinde $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}$ operatörünün davranışıyla ilgili Önerme 9.2 ise diyor ki

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_j)) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } W \cong U_j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } W \ncong U_j \text{ ise .} \end{cases}$$

Sonuç olarak, $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_j))$ tam olarak U_j 'lerin hangilerinin W ile izomorfik olduğunu sayıyor, yani

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, U_1 \oplus \cdots \oplus U_r)) = |\{U_j : U_j \cong W; j = 1, \ldots, r\}| \; .$$

Aradığımız sonuç buydu.

Soru 3. Aynı sonucu $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W))$ için elde edin.

$\square$

Örnek 9.1. Burada, Örnek 8.2'yi hatırlayalım: $G = S_3 \cong D_6$ için düzenli $\mathbb{C}G$ modülünün indirgenemez direkt toplam ayrışmasını, $\dim U_1 = \dim U_2 = 1, \dim U_3 = \dim U_4 = 2$ ve $U_1 \ncong U_2, U_3 \cong U_4$ olmak üzere

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$$

olarak bulmuştuk. Buradan, Sonuç 9.5 ile

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_1, \mathbb{C}G)) &= \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G), U_1) = 1 \\
\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_2, \mathbb{C}G)) &= \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G), U_2) = 1 \\
\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(U_3, \mathbb{C}G)) &= \dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G), U_3) = 2
\end{aligned}$$

sonucuna hemen ulaşıyoruz.

Önerme 9.6. *U bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Bu durumda*

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)) = \dim U$$

olur.

Kanıt. U vektör uzayının bir $u_1, \ldots, u_d$ tabanını seçelim. Her bir u_i taban elemanına karşılık olarak düzenli $\mathbb{C}G$-modülünden U 'ya bir $\varphi_i : \mathbb{C}G \to U$ fonksiyonunu, her $r \in \mathbb{C}G$ için

$$\varphi_i r := r u_i$$

olmak üzere tanımlayalım. Bu fonksiyonların her biri birer $\mathbb{C}G$-homomorfizmidir (gösterin!). Eğer bu $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ fonksiyonlarının $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ uzayının bir tabanı olduğunu gösterirsek önermemizi, yani $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)) = d = \dim U$ olduğunu göstermiş oluruz. Bunun için $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ dönüşümlerinin lineer bağımsız olduklarını, ve ayrıca $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ uzayını gerdiklerini yani tüm $\mathbb{C}G$-homomorfizmlerinin bu dönüşümlerin lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini göstermeliyiz.

Önce lineer bağımsızlığı kanıtlamak üzere $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ sabitleri için

$$\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_d\varphi_d \equiv 0$$

olduğunu, yani her $r \in \mathbb{C}G$ için

$$(\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_d\varphi_d)r = \lambda_1\varphi_1 r + \cdots + \lambda_d\varphi_d r = 0_U$$

olduğunu kabul edelim. Eğer $r = e$ seçersek, her i için

$$\varphi_i e = e u_i = u_i$$

olduğundan

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d = 0_U$$

sağlanır. Buradan da, $u_1, \ldots, u_d$ taban vektörlerinin lineer bağımsızlığından aradığımız $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0$ sonucunu elde ederiz.

Şimdi de $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ dönüşümlerinin $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ uzayını gerdiğini göstermek üzere, rastgele bir $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ adlı $\mathbb{C}G$-homomorfizmi alalım. Öncelikle

$$\varphi e \in U$$

vektörünü düşünelim. Bu vektör U uzayında olduğundan belli $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ sayıları için $u_1, \ldots, u_d$ taban vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak

$$\varphi e = \lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_d u_d$$

biçiminde yazılabilir. Bir $\mathbb{C}G$-modülündeki grup etkisini $\mathbb{C}G$ halkasının etkisine genişletebildiğimizi hatırlayalım. Herhangi bir $r \in \mathbb{C}G$ için

$$\begin{aligned}
\varphi r &= \varphi(re) \\
&= r(\varphi e) \\
&= r(\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_d u_d) \\
&= \lambda_1 r u_1 + \ldots \lambda_d r u_d \\
&= \lambda_1 \varphi_1 r + \ldots \lambda_d \varphi_d r \\
&= (\lambda_1 \varphi_1 + \ldots \lambda_d \varphi_d) r
\end{aligned}$$

olduğunu gözlemliyoruz, dolayısıyla aradığımız

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots \lambda_d \varphi_d$$

sonucunu elde ediyoruz. □

İspatta görüyoruz ki düzenli $\mathbb{C}G$-modülünden U adlı bir $\mathbb{C}G$-modülüne $\varphi : \mathbb{C}G \to U$ şeklinde bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmi, tamamen grubun birim elemanının görüntüsü, yani φe tarafından belirleniyor. İspat da aslında bu gözleme dayanıyor: φe vektörünü ne kadar farklı şekilde seçebiliyorsak (ve ne kadar farklı şekillerde $u_1, \ldots, u_d$ vektörleri cinsinden yazabiliyorsak) φ 'yi de o kadar farklı şekillerde seçebiliyoruz.

Bu önermeyi düzenli $\mathbb{C}G$-modülüne uygulayarak bu bölümün ana sonucunu kolaylıkla elde ediyoruz:

Teorem 9.7. *Düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün indirgenemez direkt toplam ayrışması*

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

olarak verilsin. Eğer U, düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün bir indirgenemez bileşeni ise bu ayrışmada U_i 'lerin tam olarak $\dim U$ *tanesi U ile izomorfiktir.*

Kanıt. Sonuç 9.5 ile bu indirgenemez direkt toplam ayrışmasında U ile izomorfik U_i sayısının $\dim(\mathbb{C}G, U)$ ile eşit olduğunu görüyoruz. Önerme 9.6 ise bu sayının $\dim(U)$ olduğunu söylüyor. □

Soru 4. Örnek 8.2 için bu önermeyi gözlemleyin: $G = S_3$ için üç adet izmorfik olmayan indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü çeşidinin her birinin kaçar izomorfik kopyası, düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün indirgenemez direkt toplam ayrışmasında görünmektedir?

Bir sonlu G grubu için mümkün olan *bütün* indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerini listeleyebilmek üzere sıradaki tanımı yapıyoruz.

Tanım 9.8. Bir G grubu verilmiş olsun. $V_1, \ldots, V_k$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri şu şartları sağlıyor olsun:

(i) Herhangi bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü bunlardan birine izomorfiktir.

(ii) Bunlardan herhangi ikisi birbirine izomorfik değildir.

Bu durumda, $V_1, \ldots, V_k$ bir *eksiksiz indirgenemez izormorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülleri kümesi* oluşturur denir.

Teorem 9.9. *$V_1, \ldots, V_k$, eksiksiz indirgenemez izormorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülleri kümesi oluşturuyor olsun. Öyleyse*

$$\sum_{j=1}^{k} (\dim V_j)^2 = |G|$$

olur.

Kanıt. Düzenli $\mathbb{C}G$-modülü'nü, yani $\mathbb{C}G$ 'yi indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin direkt toplamı olarak

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

şeklinde yazmış olalım. Bu U_i indirgemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin tam olarak n_j tanesi V_j ile izomorfik olsun. Bu durumda

$$\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$$

olduğundan, birbirine izomorfik U_i 'lerin boyutlarını bir araya toplarsak

$$\dim V = \sum_{j=1}^{k} n_j \dim V_j$$

elde ederiz. Fakat aynı zamanda Teorem 9.7 ile biliyoruz ki $n_j = \dim V_j$ sağlanır, dolayısıyla

$$|G| = \dim V = \sum_{j=1}^{k} n_j \dim V_j = \sum_{j=1}^{k} (\dim V_j)^2$$

sonucuna ulaşırız. □

Soru 5. Örnek 8.2 için bu teoremi gözlemleyin: $G = S_3$ için düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün indirgenemez ayrışmasında her bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünün kaçar farklı kopyası görünüyor?
(Not: $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$)

Bu teorem, sonlu bir G grubu için

- düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün indirgenemez bileşenlerinin,
- dolayısıyla, indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin
- ve dolayısıyla da indirgenemez kompleks grup temsillerinin

boyutlarının kaç olabileceği ve bunların kaçar tane çeşit olabileceği ile ilgili öncemli bir kısıtlama getiriyor: Bu boyutların kareleri toplamı, grubun mertebesini vermeli.

Örnek 9.2. Bu teorem ışığında, mertebesi 8 olan bir G grubu için kaç çeşitli indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olabileceğine bakalım. Bunun için, önceki teoremle biliyoruz ki bunların boyutları kareleri toplamının 8 vermesi gerekiyor. Bu durumda 8 sayısını kaç farklı şekilde tam karelerin toplamı olarak yazabileceğimize bakmalıyız:

$$\begin{aligned} 8 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \\ &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 \\ &\xcancel{= 2^2 + 2^2}\,. \end{aligned}$$

Bu eşitliklerden üçüncüsünün geçerli olamayacağını biliyoruz, çünkü en az bir tane 1 boyutlu $\mathbb{C}G$-modülümüz her zaman var: aşikar $\mathbb{C}G$-modülü. Bu durumda, mertebesi 8 olan bir grup için eksiksiz bir indirgenemez izormorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülleri kümesi

- ya sekiz tane 1 boyutlu
- ya da dört tane 1 boyutlu, bir tane 2 boyutlu

indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünden oluşabilir. Gerçekten de, ilk durum G değişmeli olduğunda, ikinci durumsa $G = D_8$ için gerçekleşir.

Bölüm 10

Grupların Eşlenik Sınıfları

Bu bölümde, grup temsilleri ve FG-modüllerinden bahsetmeyeceğiz, sadece gruplarla (ve özellikle altgruplar ve eşlenik sınıflarıyla) ilgileneceğiz.

10.1 Eşlenik sınıfları

Tanım 10.1. Bir G grubunda $x, y \in G$ olsun. Eğer

$$y = g^{-1}xg$$

olacak şekilde bir $g \in G$ varsa y elemanı G grubunda x elemanının bir *eşleniğidir* denir.

Notasyon. $x^g := g^{-1}xg$.

Bu notasyonla: y elemanı x 'in eşleniğidir eğer bir g için $x^g = y$ ise.

Soru 1. Her $x, y, z \in G$ için

(a) $x^{yz} = (x^y)^z$ olduğunu gösterin.

(b) $(xy)^z = x^z y^z$ olduğunu gösterin.

Soru 2. Eşleniklik ilişkisinin bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin.

Tanım 10.2. Eşleniklik bağıntısına göre bir G grubundaki denklik sınıflarına *eşlenik sınıfları* denir. Bir $x \in G$ elemanının G içinde ait olduğu eşlenik sınıfı

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\} = \{x^g : g \in G\}$$

ile gösterilir. Bir eşlenik sınıfının her bir elemanına o eşlenik sınıfının bir *temsilcisi* denir.

Sonuç 10.3. *$x, y \in G$ için Eğer $x^G \neq y^G$ ise $x^G \cap y^G = \varnothing$ olur. Başka bir deyişle, eşlenik sınıfları ayrıktır.*

Soru 3. Eşlenik sınıflarının eşlenik alma altında sabit kaldığını gösterin: Yani her $x \in G$ ve $g \in G$ için

$$g^{-1}x^G g = x^G$$

olduğunu gösterin.

Örnek 10.1.

$$\begin{aligned} G = S_3 = D_6 &= \left\langle a, b \,|\, a^3 = b^2 = e, a^b = a^{-1} \right\rangle \\ &= \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} e^G &= \{g^{-1}eg : g \in G\} \\ &= \{e\} \end{aligned}$$

olduğu rahatlıkla görülür. Aslında, aynı şekilde herhangi bir grupta $e^G = \{e\}$ elde edilir. Şimdi a için eşlenik sınıfını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} a^e &= e^{-1}ae = a \\ a^a &= a^{-1}aa = a \\ a^{(a^2)} &= (a^2)^{-1}aa^2 = a^{-2}a^3 = a \\ a^b &= b^{-1}ab = a^{-1} = a^2 \\ a^{ab} &= (ab)^{-1}a(ab) = b^{-1}a^{-1}aab = b^{-1}ab = a^2 \\ a^{(a^2b)} &= (a^2b)^{-1}a(a^2b) = b^{-1}a^{-2}aa^2b = b^{-1}ab = a^2 \ . \end{aligned}$$

Sonuç olarak $a^G = \{a, a^2\}$ elde ettik. Aynı hesabı $x = b$ için yapalım. $bab = b^{-1}ab = a^2$ olduğundan $ba = a^2b$ olduğunu hatırlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} b^e &= b \\ b^a &= a^{-1}ba = a^{-1}a^2b = ab \\ b^{(a^2)} &= (b^a)^a = (ab)^a = a^{-1}aba = ba = a^2b \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $b, ab, a^2b \in b^G$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, eşlenik sınıfları kesişemeyeceğinden ve grubun diğer elemanları diğer eşlenik sınıflarının içinde kaldığından $b^G = \{b, ab, a^2b\}$ sonucuna ulaşıyoruz. Yani $G = S_3 = D_6$ grubunun eşlenik sınıflarının tam olarak

$$\begin{aligned} e^G &= \{e\} \\ a^G &= \{a, a^2\} \\ b^G &= \{b, ab, a^2b\} \end{aligned}$$

olduğunu görüyoruz.

Soru 4. (a) Her $x \in G$ için $x \in x^G$ olduğunu gösterin.

(b) x grubun merkez elemanıdır [1] ancak ve ancak $x^G = \{x\}$ ise, gösterin.

(c) Buradan, eğer G grubu değişmeli ise tüm eşlenik sınıflarının tek elemanlı olacağı sonucunu elde edin.

Lemma 10.4. *$x, g \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için*

$$(x^g)^n = (x^n)^g$$

olur.

Kanıt. Öncelikle

$$(x^g)^2 = (g^{-1}xg)(g^{-1}xg) = g^{-1}x.gg^{-1}.xg = g^{-1}x^2g = (x^2)^g$$

[1] yani $x \in \mathrm{Z}(G)$

olduğunu gözlemleyelim. Bu işleyişle, tümevarım kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(x^g)^n = g^{-1}x^n g = (x^n)^g$$

olduğu, yani x^n ve y^n in birbirinin eşleniği olduğu gösterilebilir. İki tarafın tersi alınarak da her $n \in \mathbb{N}$ için $y^{-n} = g^{-1}x^{-n}g$ elde ederiz ve böylece sonucu tüm tamsayılara genişletiriz. □

Önerme 10.5. *Bir G grubunda $x, y \in G$ elemanları birbirinin eşleniği olsun. Bu durumda:*

(1) Her $n \in \mathbb{Z}$ için x^n ve y^n birbirinin eşleniğidir.

(2) x ve y 'nin mertebeleri eşittir.

Kanıt. (1) Bir $g \in G$ için $y = x^g$ olsun. Bu durumda, Lemma 10.4 ile görüyoruz ki

$$y^n = (x^g)^n = (x^n)^g$$

olur, dolayısıyla x^n ve y^n eşleniktir.

(2) x 'in mertebesi m olsun. Bu durumda $x^m = e$ olur. Dolayısıyla, Lemma 10.4 ile $y^m = (x^g)^m = (x^m)^g = e^g = e$ elde ederiz. Bu ise bize y 'nin mertebesinin m 'den, yani x 'in mertebesinden küçük-eşit olduğunu [2] gösterir. Aynı şekilde y 'nin mertebesiyle başlayarak da x 'in mertebesinin y 'nin mertebesinden küçük-eşit olduğunu görürüz. Bu iki eşitsizliği birleştirdiğimizde, x ve y 'nin mertebelerinin eşit olduğu sonucuna ulaşırız. □

10.2 Eşlenik sınıfı büyüklükleri

Tanım 10.6. Bir G grubunda $x \in G$ elemanını alalım. Bu x elemanının G grubundaki *merkezleyicisi*

$$\mathrm{C}_G(x) := \{g \in G : xg = gx\}$$

kümesidir.

[2] daha net olarak, m 'yi böldüğünü

Aynı zamanda

$$C_G(x) = \{g \in G : x^g = x\}$$

olduğuna dikkat edin.

Soru 5. (a) Her $x \in G$ için $C_G(x)$ kümesinin, G grubunun bir altgrubu olduğunu gösterin.

(b) $\langle x \rangle \trianglelefteq C_G(x)$ olduğunu gösterin.

Soru 6. $x, y \in G$ olsun. Aşağıdaki üç koşulun birbirine denk olduğunu gösterin:

i. $y \in C_G(x)$

ii. $x \in C_G(y)$

iii. x ve y değişmeli, yani $xy = yx$

Teorem 10.7. *Bir G grubunda $x \in G$ elemanını alalım. Bu durumda x 'in dahil olduğu eşlenik sınıfının büyüklüğü*

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$$

olarak elde edilir. [3] *Özel olarak, bu denklik sınıfının büyüklüğü yani $|x^G|$ sayısı, grubun mertebesini yani $|G|$ sayısını böler.*

Kanıt. $x \in G$ elemanını sabitleyelim ve $\psi : G \to x^G$ fonksiyonunu

$$\psi(g) = g^{-1}xg = x^g$$

olarak tanımlayalım. x^G kümesinin tanımı gereği bu fonksiyon örtendir. Bir $y \in x^G$ elemanını alalım ve bu elemanın öngörüntüsünü, yani $\psi^{-1}(y)$ kümesini

[3] Burada $|G : C_G(x)|$ ile $C_G(x)$ altgrubunun G içindeki indeksinin gösterildiğini hatırlayalım. Bir H altgrubunun G içindeki *indeksi*, o altgrubun (sağ ya da sol) koset sayısıdır ve $\frac{|G|}{|H|}$ ile eşittir.

düşünelim. Öncelikle; $y \in x^G$ olması demek, bir $h \in G$ için $y = x^h = h^{-1}xh$ olması demektir. Bu durumda, bir $g \in G$ elemanı aldığımızda $g \in \psi^{-1}(x)$ olması için

$$\begin{aligned}\psi(g) = y &\iff x^g = x^h \\ &\iff g^{-1}xg = h^{-1}xh \\ &\iff hg^{-1}xgh^{-1} = x \\ &\iff (gh^{-1})^{-1}x(gh^{-1}) = x \\ &\iff gh^{-1} \in \mathrm{C}_G(x) \\ &\iff g \in \mathrm{C}_G(x)h\end{aligned}$$

olmalıdır. Dolayısıyla her bir $y \in x^G$ için $\psi^{-1}(y) = \mathrm{C}_G(x)h$ elde ederiz. Buradan da, kosetlerin büyüklüğü ilgili grubun büyüklüğüne eşit olduğundan

$$|\psi^{-1}(y)| = |\,\mathrm{C}_G(x)h| = |\,\mathrm{C}_G(x)|$$

elde edilir. Bu öngürüntü kümesinin büyüklüğünün her bir $y \in x^G$ için aynı olduğuna dikkat edelim. Böylece, bu öngörüntü kümeleri ayrık olduğundan ve bir araya geldiklerinde G kümesini oluşturduklarından

$$\begin{aligned}|G| &= \left|\bigcup_{y \in x^G} \psi^{-1}(y)\right| \\ &= \sum_{y \in x^G} |\psi^{-1}(y)|| \\ &= \sum_{y \in x^G} |\,\mathrm{C}_G(x)| \\ &= |x^G|.|\,\mathrm{C}_G(x)|\end{aligned}$$

elde edilir, ki bu aradığımız denkleme açık şekilde denktir. □

Şimdi de Soru 4(b)'yi hatırlayalım:

$$|x^G| = 1 \iff x \in \mathrm{Z}(G)\ .$$

Bu sonucu üstteki önermeyle birleştirdiğimizde sonlu gruplar için *sınıf denklemini* elde ediyoruz:

Teorem 10.8 (Sınıf Denklemi)**.** *Bir sonlu G grubunda $x_1, \ldots, x_l$ elemanları G 'nin tüm farklı eşlenik sınıflarının birer temsilcisi olsun. Bu durumda*

$$|G| = |\operatorname{Z}(G)| + \sum_{x_i \notin \operatorname{Z}(G)} |x_i^G|$$

olur. Ayrıca her $i = 1, \ldots, l$ için $|x_i^G| = |G : \operatorname{C}_G(x_i)|$ sağlanır ve hem $|\operatorname{Z}(G)|$ hem de her bir $|x_i^G|$ sayısı grubun mertebesini yani $|G|$ 'yi böler.

10.3 Dihedral grupların eşlenik sınıfları

Yukarıda $n = 3$ eleman üzerinde dihedral grubu, yani D_6 için eşlenik sınıflarını belirlemiştik. Şimdi de herhangi $n \in \mathbb{N}$ için n eleman üzerinde $2n$ elemanlı dihedral grubun, yani D_{2n} 'nin eşlenik sınıflarını belirleyelim.

n eleman üzerinde dihedral grubunu

$$G = D_{2n} = \left\langle a, b \mid a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$$

temsiliyle düşünelim. Bu grubun elemanlarının

$$G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1},\ b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$$

formunda, yani $i = 0, \ldots, n-1$ olmak üzere a^i ya da a^ib biçiminde yazılabileceğini hatırlayalım.

n sayısının tek ve çift olduğu durumları ayıracağız.

<u>n **tek ise:**</u>

Önce $i = 1, \ldots, n-1$ için a^i formunda bir elemanı düşünelim. $\operatorname{C}_G(a^i) \supseteq \langle a \rangle$ olduğundan Teorem 10.7 ile

$$|(a^i)^G| = |G : \operatorname{C}_G(a^i)| \leqslant |G : \langle a \rangle\,| = 2 \tag{10.1}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $(a^i)^b = (a^b)^i = (a^{-1})^i = a^{-i}$ olduğundan $a^{-i} \in (a^i)^G$, dolayısıyla $\{a^i, a^{-i}\} \subseteq a^G$ elde ederiz. Ek olarak, n tek olduğundan

$a^i \neq a^{-i}$ olur (neden?) ve buradan.

$$|(a^i)^G| \geqslant |\{a^i, a^{-i}\}| = 2 \tag{10.2}$$

elde edilir. Denklem 10.1 ve Denklem 10.2 birlikte bize $|(a^i)^G| = 2$ olduğunu ve dolayısıyla

$$(a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}$$

sonucunu verir.

Şimdi ise $b \in G$ elemanının eşlenik sınıfını düşünelim.

$$b^e = b^b = b$$

olduğundan $\{e, b\} \subseteq \mathrm{C}_G(b)$ olduğunu görüyoruz.

$i = 1, \ldots, n-1$ için $g = a^i$ alalım. Yukarıda elde ettiğimiz üzere $(a^i)^b = a^{-i} \neq a^i$ olduğundan $b \notin \mathrm{C}_G(a^i)$ olduğunu, buradan da Soru 6 ile $a^i \notin \mathrm{C}_G(b)$ olduğunu görüyoruz.

$i = 1, \ldots, n-1$ için $g = a^i b$ alalım. Bu durumdaysa Soru 1(b) ile

$$(a^i b)^b = (a^i)^b b^b = a^{-i} b \neq a^i b$$

elde ederiz. Dolayısıyla yine $b \notin \mathrm{C}_G(a^i b)$ olduğundan $a^i b \notin \mathrm{C}_G(b)$ sonucuna ulaşırız.

Ulaştığımız bu sonuçları birleştirdiğimizde b elemanının merkezleyicisinin

$$\mathrm{C}_G(b) = \{e, b\}$$

olduğunu görüyoruz. Buradan da Teorem 10.7 bize

$$|b^G| = \frac{|G|}{|\,\mathrm{C}_G(b)|} = \frac{2n}{2} = n$$

olduğunu söylüyor. Bütün $a^i, i = 0, \ldots, n$ formunda elemanlar diğer eşlenik sınıflarında kullanılmış olduğundan, b 'nin eşlenik sınıfının bütün $a^i b$ formunda elemanlardan oluştuğunu, yani

$$b^G = \{b, ab, \ldots, a^{n-1} b\}$$

olduğunu görüyoruz.

Böylece $n = 2m + 1$ tek sayısı olmak üzere, $G = D_{2n}$ grubunun elemanlarının toplamda $m+2$ tane olan eşlenik sınıflarına nasıl dağıldığını şu şekilde özetleyebiliriz:

$$\underbrace{\{e\}}_{\substack{1\\ \text{elemanlı}}}, \underbrace{\{a, a^{n-1}\}, \{a^2, a^{-2}\}, \ldots, \{a^m, a^{m+1}\}}_{\text{2'şer elemanlı, m tane}}, \underbrace{\{b, ab, \ldots, a^{n-1}b\}}_{n \text{ elemanlı}}$$

<u>n **çift ise:**</u>

Bir $m \in \mathbb{N}$ için $n = 2m$ olsun.

$i = 1, \ldots, n-1$ için $g = a^i$ alalım. Eğer $i \neq m$ ise yukarıda n sayısının tek olduğu durum için yaptığımız ispat aynı şekilde çalışır ve $(a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}$ elde ederiz. $g = a^m$ için ise

$$(a^m)^b = a^{-m} = a^m$$

olduğundan a^m ve b elemanlarının değişmeli olduğunu görüyoruz. Ayrıca a^m 'nin a ile de değişmeli olduğunu hatırlıyoruz. Sonuç olarak, $g = a^m$ elemanı grubun iki üreteciyle de değişmeli olduğundan tüm elemanlarıyla değişmelidir, dolayısıyla $\mathrm{C}_G(a^m) = G$ elde ederiz. Bu da bize Teorem 10.7 ile $|(a^m)^G| = |G|/|G| = 1$ sonucunu verir. Böylece $(a^m)^G = \{a^m\}$ olduğunu görürüz.

Şimdi de $g = b$ için eşlenik sınıfını hesaplayalım. Bu hesap için şu sorudaki sonucu kullanacağız:

Soru 7. (a) $b^{(a^{-1})} = aba^{-1} = a^2b$ olduğunu gösterin.

(b) Her $j \in \mathbb{N}$ için $b^{(a^{-j})} = a^jba^{-j} = a^{2j}b$ olduğunu tümevarımla gösterin.

Buradan $b^G \supseteq \{b, a^2b, a^4b, \ldots, a^{2m-2}b\}$ sonucuna ulaşıyoruz. $S \subset G$ kümesini bu

$$S = \{b, a^2b, a^4b, \ldots, a^{2m-2}b\}$$

kümesi olarak tanımlayalım.

Soru 8. Yukarıdaki sorudaki sonucu, her $j \in \mathbb{Z}$ için $b^{(a^j)} = a^{-2j}b$ olduğunu göstererek genişletin.

Rastgele bir $g \in D_{2n}$ alalım. Bu eleman bir $j \in 0, \ldots, n-1$ için ya $g = a^j$ ya da $g = a^j b$ formundadır. Eğer $g = a^j$ formunda ise Soru 8'deki sonuç ile $b^g = b^{(a^j)} \in S$ olduğunu görüyoruz. Eğer $g = a^j b$ formundaysa

$$b^g = b^{a^j b} = b^{ba^{-j}} = (b^b)^{(a^{-j})} = b^{(a^{-j})} = a^{2j}b$$

olduğunu, dolayısıyla yine $b^g \in S$ olduğunu görüyoruz. Böylece,

$$b^G = S = \{b, a^2b, a^4b, \ldots, a^{2m-2}b\}$$

sonucuna ulaşıyoruz.

Soru 9. Yukarıdaki hesaba benzer şekilde

$$(ab)^G = \{ab, a^3b, a^5b, \ldots, a^{2m-1}b\}$$

olduğunu gösterin.

Böylece, $n = 2m$ durumunda $G = D_{2n}$ grubunun tam olarak $m + 3$ adet eşlenik sınıfını

$$\underbrace{\{e\}, \{a^m\}}_{\substack{\text{1 elemanlı,} \\ \text{2 tane}}}, \underbrace{\{a, a^{n-1}\}, \ldots, \{a^{m-1}, a^{m+1}\}}_{\text{2'şer elemanlı, } m-1 \text{ tane}}, \underbrace{\{b, a^2b, \ldots, a^{2m-2}b\}, \{ab, a^3b, \ldots, a^{2m-1}b\}}_{m-1 \text{ elemanlı, 2 tane}}$$

şeklinde listeleyebiliriz.

10.4 Simetrik grupların eşlenik sınıfları

n elemanlı küme üzerinde S_n simetrik grubu ile ilgili şu bilgileri hatırlayalım:

- S_n, bir n elemanlı küme üzerindeki permütasyonlardan (yani birebir ve örten fonksiyonlardan) oluşur. Bu kümeyi $\{1, 2, \ldots, n\}$ olarak alabiliriz.

- İlgili kümedeki $i_1, i_2, \ldots, i_k$ üzerinde

$$\begin{tikzcd} i_1 \arrow[r] & i_2 \arrow[r] & i_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i_{k-1} \arrow[r] & i_k \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}$$

  şeklinde etki eden ve diğer elemanları kendisine gönderen permütasyona *k-döngüsü* diyoruz ve $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ şeklinde yazıyoruz.

- Her $x = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ şeklinde k-döngüsü ve $g \in G$ için

$$x^g = g^{-1}xg = (g^{-1}i_1\ g^{-1}i_2\ \ldots\ g^{-1}i_k)$$

  olur. Görüyoruz ki eşlenik alma altında bir k-döngüsünün şekli değişmez: bir k-döngüsünün eşleniği yine bir k-döngüsüdür.

- Her $g \in S_n$ permütasyonu, ayrık k-döngülerinin çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabilir. [4]

Rastgele bir $x \in S_n$ alalım ve bu permütasyonu *ayrık* k-döngülerinin çarpımı olarak $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_s$ olmak üzere

$$x = (i_{11}\ i_{12}\ \ldots\ i_{1k_1})(i_{21}\ i_{22}\ \ldots\ i_{2k_1})\ldots(i_{s1}\ i_{s2}\ \ldots\ i_{sk_s})$$

şeklinde yazalım. bu durumda, herhangi $g \in S_n$ için eşlenik alırsak

$$x^g = (g^{-1}i_{11}\, g^{-1}i_{12}\ \ldots\ g^{-1}i_{1k_1})(g^{-1}i_{21}\, g^{-1}i_{22}\ \ldots\ g^{-1}i_{2k_1})\ldots(g^{-1}i_{s1}\, g^{-1}i_{s2}\ \ldots\ g^{-1}i_{sk_s})$$

şeklinde x^g permütasyonunu ayrık k-döngülerinin çarpımı olarak elde ederiz. Görüyoruz ki, eşlenik alma altında x permütasyonunun, çarpımı olarak yazıldığı k-döngülerinin uzunlukları değişmedi. Böyle bir $x \in S_n$ permütasyonu için $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ sonlu dizisi, x permütasyonunun *döngü biçimi* olarak isimlendirilir. Gördük ki bir elemanın döngü biçimi eşlenik alma altında değişmiyor.

Bu noktada aklımıza gelmesi doğal bir soru şu: peki bu ifadenin tersi de doğru mudur, yani iki permütasyonun döngü biçimleri aynı ise bu permütasyonlar birbirinin eşleniği midir? Bu sorunun cevabı da "evet". Hem x hem y permütasyonunun döngü biçimi $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ olsun. Bu durumda bu iki permütasyon

[4] Sıralama değişmesi gözardı edildiğinde. Ayrık döngüler aralarında değişmelidir.

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
x = & (i_{11} & i_{12} & \ldots & i_{1k_1}) & (i_{21} & i_{22} & \ldots & i_{2k_1}) & \cdots & (i_{s1} & i_{s2} & \ldots & i_{sk_s}) \\
& \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
y = & (j_{11} & j_{12} & \ldots & j_{1k_1}) & (j_{21} & j_{22} & \ldots & j_{2k_1}) & \cdots & (j_{s1} & j_{s2} & \ldots & j_{sk_s})
\end{array}$$

biçimlerinde yazılabilir. Şekilde oklarla gösterildiği gibi i 'leri j 'lere gönderen, diğer elemanlarıysa herhangi bir şekilde birbirine eşleyen bir permütasyona g dersek, yukarıda gösterildiği gibi $y^g = x$ olduğunu, dolayısıyla x ve y 'nin birbirinin eşleniği olduğunu görürüz.

Sonuç olarak, simetrik grubun eşlenik sınıfları permütasyonların döngü şekilleri tarafından, yani n sayısının pozitif tamsayıların toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabileceği tarafından belirlenir.

Örnek 10.2. $G = S_3$ için eşlenik sınıflarını belirleyelim. 3 sayısını

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ &= 2 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

olmak üzere üç farklı şekilde pozitif tamsayıların toplamı olarak yazabiliriz. Dolayısıyla üç farklı döngü şekli mümkündür ve bunlara karşılık gelen üç eşlenik sınıfı

Döngü şekli	Eşlenik sınıfı
(3)	{(123),(132)}
(2,1)	{(12),(13),(23)}
(1,1,1)	{e}

olarak listelenebilir.

Soru 10. $G = S_4$ için tüm eşlenik sınıflarını bulun.

Soru 11. Kitaptan (s.111) A_n alterne gruplarının eşlenik sınıflarını inceleyin.

10.4.1 Normal altgruplar

Bu kısımda, eşlenik sınıflarının normal altgruplarla ilişkisini aşağıdaki önerme ile göreceğiz.

Önerme 10.9. *Bir G grubunun H altgrubu, G 'nin normal altgrubudur ancak ve ancak eşlenik sınıflarının bileşkesi olarak ifade edilebiliyorsa.*

Kanıt. ($\Longrightarrow$) G grubunun bir S altkümesi için $H = \bigcup_{x \in S} x^G$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $g \in G$ için

$$g^{-1}Hg = g^{-1}\left(\bigcup_{x\in S} x^G\right)g = \bigcup_{x\in S} g^{-1}x^G g = \bigcup_{x\in S} x^G = H$$

olduğunu Soru 3'teki sonucu da kullanarak görüyoruz.

($\Longleftarrow$) $H \trianglelefteq$ olsun. Her bir $x \in H$ için ve her $g \in G$ için $g^{-1}xg \in H$ olduğundan $x^G \subseteq H$ olur. Bu durumda

$$H = \bigcup_{x\in H}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in H} x^G \subseteq H$$

elde ederiz, dolayısıyla $H = \bigcup_{x\in H} x^G$ sonucuna ulaşırız. $\square$

Bölüm 11

Karakterler

11.1 Karakter fonksiyonu

Bir matrisin izi:

Aşağıda bir $\mathbb{C}G$-modülünün (ve dolayısıyla bir grup temsilinin) karakterini, her bir grup elemanını bir kompleks sayıya götüren fonksiyon bir olarak tanımlayacağız. Bunun için önce bir kare matrisin *izinin* tanımını hatırlayalım.

Tanım 11.1. A bir $n \times n$ boyutlu matris olsun. A matrisinin *izi* [1] , köşegenin üzerindeki girdilerin toplamı olarak tanımlanır ve

$$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

ile gösterilir.

İz fonksiyonunun önemli bir özelliği, aşağıdaki lemmada görüldüğü üzere tabandan bağımsız olması ya da başka bir deyişle benzer matrisleri aynı değere götürmesidir. Bunu göstermek için önce şu önemli lemmayı ispatlayalım.

[1] ing. *trace*

Lemma 11.2. *A ve B kare matrisleri için*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

sağlanır.

Kanıt.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ji} A_{ij} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} \\
&= \operatorname{tr}(BA)
\end{aligned}$$

□

Not. Özel durumlar dışında $\operatorname{tr}(AB)$ ile $\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$ çarpımının eşit *olmadığına* dikkat edelim!

Önerme 11.3. *A, B kare matrisleri ve P tersinir matrisi için*

$$B = P^{-1}AP$$

olsun, ya da başka bir ifadeyle A ve B benzer matrisler olsun. Bu durumda $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$ *sağlanır.*

Kanıt. Üstteki lemmayı kullarak

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}.AP) = \operatorname{tr}(AP.P^{-1}) = \operatorname{tr} A$$

elde ederiz. □

İz fonksiyonunun iki diğer temel özelliğinin ispatını egzersiz olarak bırakıyoruz:

Soru 1. Aşağıdaki önermeleri ispatlayın:

(1) Eğer A ve B aynı boyutlu kare matris ise. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

(2) Herhangi iki A ve B kare matrisi için $\operatorname{tr}(A \oplus B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

Karakter:

Bir grup temsilinin karakterini, o grup temsili ile iz fonksiyonunun bileşkesi olarak tanımlayacağız.

Tanım 11.4. V bir $\mathbb{C}G$-modülü ve $\mathcal{B}$ onun bir tabanı olsun. Bu $\mathbb{C}G$-modülünün *karakteri*,

$$\chi(g) = \operatorname{tr}\,[g]_{\mathcal{B}}$$

ile tanımlanan $\chi : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonudur. Bir $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ grup temsilinin *karakteri*, ilgili $\mathbb{C}G$-modülünün karakteridir.

İz fonksiyonu Önerme 11.1 ile tabandan bağımsız olduğunudan bir $\mathbb{C}G$-modülünün karakteri iyi tanımlıdır.

Bir $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ grup temsilinin karakterinin $\chi = \operatorname{tr} \circ \rho$ fonksiyonu olduğunu görüyoruz, dolayısıyla rastgele bir $g \in G$ elemanındaki değeri

$$\chi(g) = \operatorname{tr}(\rho g)$$

olur.

Bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünün karakterine *indirgenemez karakter* diyeceğiz.

Önerme 11.5. *(1) İzomorfik $\mathbb{C}G$-modüllerinin karakteri aynıdır.*

(2) Eğer $x, y \in G$ elemanları eşlenik ise G grubunun her χ karakteri için

$$\chi(x) = \chi(y)$$

sağlanır.

Kanıt. Egzersiz. $\square$

Örnek 11.1. Dört eleman üzerine dihedral grubu, yani

$$G = D_8 = \left\langle a, b \,|\, a^4 = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle$$

grubunu düşünelim. Bu grubun

$$\rho a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \rho b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ile belirlenen $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ grup temsilini alalım. Bu grup temsilinin diğer grup elemanlarındaki değerlerini

$$\rho e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \rho a^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \rho a^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\rho(ab) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(a^2b) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(a^3b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplayabiliriz. Buradan da, bu matrislerin köşegenleri üzerindeki iki girdiyi toplayarak izlerini hesaplarız ve bu temsilin karakterini buluruz:

g	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$\chi(g)$	2	0	-2	0	0	0	0	0

Bu tablo aslında gerektiğinden uzun, çünkü Önerme 11.5(2) ile eşlenik olan elemanlar için karakterlerin aynı değeri alacağını biliyoruz. Bölüm 10.3'te D_8 grubunun eşlenik sınıflarının

$$\{e\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}, \{b, a^2b\}, \{ab, a^3b\}$$

olduğunu gördük. Dolayısıyla tabloyu sadece bu eşlenik sınıflarının temsilcileri için

g	e	a	a^2	b	ab
$\chi(g)$	2	0	-2	0	0

olarak vermemiz yeterli.

Tanım 11.6. V bir $\mathbb{C}G$-modülü ve χ onun karakteri olsun. Bu durumda χ 'nin *derecesi*, V 'nin boyutu olarak tanımlanır.

Bir χ adında karakterin derecesinin her zaman $\chi(e)$ olduğunu gözlemleyelim (nasıl?).

Örnek 11.2. $G = D_6$ grubu için tüm indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin izomorfizm sınıflarını U_1, U_2 ve U_3 olarak Örnek 8.2 ile belirlemiştik. Bu üç $\mathbb{C}G$-modülü, sırasıyla aşağıda verilen ρ_1, ρ_2 ve ρ_3 temsillerine karşılık gelir (gösterin). $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}}$, olmak üzere:

$$\rho_1 a = [\ 1\ ]\ ,\ \rho_1 b = [\ 1\ ]$$
$$\rho_2 a = [\ 1\ ]\ ,\ \rho_2 b = [\ -1\ ]$$
$$\rho_3 a = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{bmatrix}\ ,\ \rho_2 b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ .$$

Ayrıca, Örnek 10.1 ile $G = D_6$ grubunun eşlenik sınıflarının e^G, a^G ve b^G olduğunu da biliyoruz. Böylece, bu grubun *tüm* indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin karakterlerini aşağıdaki gibi listeleyebiliriz:

g	e	a	b
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

(11.1)

Bu şekilde, bir G grubu için sütunlarını tüm eşlenik sınıflarının (ya da bu sınıfların temsilcilerinin), satırlarını karakterlerin oluşturduğu tabloya o grubun *karakter tablosu* denir. Karakter tabloları gruplar için büyük önem taşır.

Önerme 11.7. *V bir $\mathbb{C}G$-modülü ve χ onun karakteri olsun. Bir $g \in G$ grup elemanının mertebesi m olsun. Bu durumda;*

(1) $\chi(e) = \dim V$,

(2) $\chi(g)$, *birin m 'inci köklerinin bir toplamıdır,*

(3) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$,

(4) $\chi(g)$ *gerçeldir ancak ve ancak g ve g^{-1} eşlenik ise.*

Kanıt. (1) Egzersiz: $[e]_{\mathcal{B}}$ birim matristir.
(2) Egzersiz: Önerme 7.8.
(3) Egzersiz: Önerme 7.8'ü g^{-1} için kullanın.
(4) Egzersiz: Madde (3)'ten. $\square$

Teorem 11.8. *$\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ bir grup temsili olsun. χ bu grup temsilinin karakterini göstermek üzere,*

(1) her $g \in G$ için

$$|\chi(g)| = \chi(e) \iff \text{bir } \lambda \text{ için } \rho g = \lambda I_n$$

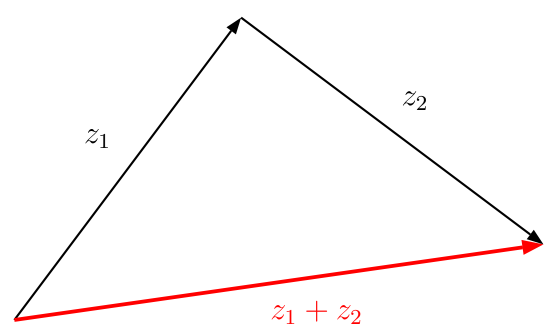
(2) $\operatorname{Ker} \rho = \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$

Kanıt. (1) Eğer $\rho g = \lambda I_n$ ise $V = \mathbb{C}^n$ olmak üzere karakterin tanımından ve önerme 11.7(1) ile

$$\chi(g) = n\lambda = \lambda \dim V = \chi(e)$$

olduğu hesaplanır.

Şimdi $|\chi(g)| = \chi(e)$ olduğunu varsayalım. İspatın bu yönü için önce şu gözlemi yapalım: z_1, z_2 kompleks sayıları için $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ üçgen eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu, yani $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ ise sadece z_2 eğer z_1 'in bir *pozitif gerçel katı* ise (yani kompleks düzlemde onları temsil eden vektörler aynı yönde ise) sağlanır. Bunu, aşağıdaki üçgen üzerine düşünerek gözlemleyebiliriz:



Aynı sebeplerle, n kompleks sayı için $|z_1+\cdots+z_n| = |z_1|+\cdots+|z_n|$ koşulu ancak ve ancak bu sayılardan her biri z_1 sayısının pozitif gerçel katıysa sağlanır.

Şimdi, Önerme 7.8 ile, bir $\mathcal{B}$ tabanında $[g]_{\mathcal{B}}$ matrisi $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sayıları 1'in kökleri olmak üzere

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

formunda yazılabilir, dolayısıyla

$$\chi(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_m$$

elde ederiz. Şimdi, her bir ω_i sayısı 1'in kökü olduğundan $|\omega_i| = 1$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$|\chi(g)| = |\omega_1 + \cdots + \omega_m|$$

sayısıyla

$$\chi(e) = \dim V = n = |\omega_1| + \cdots + |\omega_m|$$

sayısı eşittir ancak ve ancak her bir ω_i sayısı ω_1'in pozitif gerçel katıysa. Bu ise, her bir ω_i kompleks sayısının büyüklüğü (modülü) bir olduğu için ancak her biri ω_1'in 1 katıysa, yani ona eşitse mümkün olur. Şimdi, bu ω_i 'lerin hepsini λ ile isimlendirelim, yani $\lambda = \omega_1 = \cdots = \omega_n$ olsun. Bu durumda, Denklem 11.2 ile $[g]_{\mathcal{B}} = \lambda I_n$ sonucunu elde ederiz. □

Düzenli karakter:

Tanım 11.9. Bir G grubunun düzenli $\mathbb{C}G$-modülünün karakterine o grubun *düzenli karakteri* denir ve $\chi_{\text{düz}}$ ile gösterilir.

Teorem 11.10. *Bir G grubunun eksiksiz indirgenemez izormorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülleri kümesi $V_1, \ldots, V_k$ olarak verilsin. Her bir V_i 'nin karakteri χ_i ve boyutu d_i olsun. Bu durumda*

$$\chi_{d\ddot{u}z} = d_i\chi_1 + \cdots + d_i\chi_k$$

olur.

Kanıt. Egzersiz: Soru 1(2) ve Teorem 9.7'den. □

Teorem 11.11.
$$\chi_{düz}(g) = \begin{cases} |G| & , \text{ eğer } g = e \text{ ise,} \\ 0 & , \text{ eğer } g \neq e \text{ ise.} \end{cases}$$

Kanıt. $g = e$ ise: egzersiz.

$g \neq e$ alalım. $\mathcal{B} : g_1, \ldots, g_n$ ile düzenli $\mathbb{C}G$ modülünün grup elemanlarından oluşan tabanı temsil edilsin. Şimdi, g 'nin düzenli $\mathbb{C}G$-modülünde etkisini bu tabana göre belirten matrise A diyelim, yani $A = [g]_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda A matrisinin girdileri her $j = 1, \ldots, n$ için

$$gg_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} g_i$$

denklemiyle belirlenir. Burada, $g \neq e$ olduğundan, bir k için $gg_j = g_k \neq g_j$ olduğunu, dolayısıyla
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = k \text{ ise,} \\ 0 & , i \neq k \text{ ise} \end{cases}$$
olduğunu, özel olarak ise her j için $A_{jj} = 0$ olduğunu gözlemliyoruz. Böylece $A = [g]_{\mathcal{B}}$ matrisinin köşegenini üzerindeki girdilerin, dolayısıyla da izinin sıfır olduğu sonucuna ulaşıyoruz. □

Bu son iki teorem birlikte düşünüldüğünde bize bir grubun indirgenemez karakterlerinin, ilgili indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin boyutlarıyla ağırlıklandırılarak toplandıklarında, $g = e$ dışındaki eşlenik sınıflarında sıfır sonucunu, $g = e$ için ise grubun mertebesini verdiğini söylüyor. Bunu $G = D_6$ için gözlemleyelim. Bu grup için karakter tablosu Tablo 11.1 ile verilmişti. Teoremlerin belirttiği üzere, ilk iki satırı üçüncü satırın iki katıyla topladığımızda, ilk sütun için grubun mertebesi olan 6 sayısını, diğer sütunlar içinse sıfırı elde ediyoruz.

11.2 İç çarpım ve karakterler

Fonksiyon uzayı üzerinde iç çarpım:

Bir G grubundan kompleks sayılar cismine tüm fonksiyonları $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ ile gösterelim. Bu küme, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama ve skaler çarpma işlemleriyle boyutu G'nin mertebesine eşit bir kompleks vektör uzayı oluşturur (nasıl?). G grubunun her karakterinin, bu uzayın bir elemanı olduğuna da dikkat edelim.

Şimdi, bu uzay üzerinde bir *kompleks iç çarpımı* şöyle tanımlayalım: $\theta, \phi \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ için

$$\langle \theta \, , \, \phi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g) \overline{\phi(g)}$$

olsun.

Soru 2. Bu işlemin gerçekten de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ kompleks vektör uzayı üzerinde bir kompleks iç çarpım tanımladığını, yani

i. $\langle \theta \, , \, \phi \rangle = \overline{\langle \phi \, , \, \theta \rangle}$

ii. $\langle \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 \, , \, \phi \rangle = \langle \lambda_1 \theta_1 \, , \, \phi \rangle + \langle \lambda_2 \theta_2 \, , \, \phi \rangle \, , \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

iii. $\langle \theta \, , \, \theta \rangle \geqslant 0$ ve $\langle \theta \, , \, \theta \rangle = 0 \iff \theta \equiv 0.$

özelliklerini sağladığını gösterin.

Karakterlerin iç çarpımları:

Biz, özellikle karakterlerin birbirleriyle iç çarpımları ile ilgileneceğiz.

Önerme 11.12. *χ ve ψ fonksiyonları, G grubunun birer karakteri olsun. Bu durumda*

$$\langle \chi \, , \, \psi \rangle = \langle \psi \, , \, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$$

olur, ve bu değer bir gerçel sayıdır.

Kanıt. $\psi(g^{-1}) = \overline{\psi(g)}$ olduğundan

$$\langle \chi \, , \, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$$

elde ederiz. Aynı zamanda grubu $G = \{g^{-1} : g \in G\}$ olarak da yazılabileceğimizden toplamda bir değişken değişikliğiyle

$$\langle \chi \, , \, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g) = \langle \psi \, , \, \chi \rangle$$

sonucuna ulaşırız. □

Önerme 11.13. *χ ve ψ fonksiyonları, G grubunun birer karakteri olsun. Ayrıca $g_1, \ldots, g_l \in G$ ile, G grubunun tüm eşlenik sınıflarının birer temsilcisi verilsin. Bu durumda*

$$\langle \chi \, , \, \psi \rangle = \langle \psi \, , \, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{l} \frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|\,\mathrm{C}_G(g_i)|}$$

olur.

Kanıt. Egzersiz. Karakterin eşlenik sınıflarında aynı değeri verdiğini ve Teorem 10.7'yi iç çarpım tanımına uygulayarak sonuç elde edilir. □

Sıradaki teorem, iç çarpımın indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin karakteri üzerinde nasıl davradığını özetliyor. İç çarpımın geometrik anlamını düşünecek olursak, bu teorem indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin karakterlerinin birbirlerine dik olduklarını ve boylarının 1 olduğunu söylüyor. Bunu, izomorfik olmayan indirgenemez $\mathbb{C}$-modüllerinin karakterlerinin *ortonormal* oldukları şeklinde de ifade edebiliriz.

Bütün $\mathbb{C}G$-modülleri indirgenemez olanlar cinsinden yazılabileceğinden, bu teorem *bütün* karakterlerin indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin karakterleri cinsinden nasıl ifade edilebileceğini de bize söylüyor. Bu yüzden, karakter tablolarının bütün karakterleri tarif etmede nasıl önem kazandığını görüyoruz. Bu teoremin kanıtını burada vermeyeceğiz, kanıtı kitaptan okuyabilirsiniz.

Teorem 11.14. *U ve V birbirine izomorfik olmayan birer indirgenemez $\mathbb{C}$-modülü, χ ve ψ sırasıyla bunların karakterleri olsun. Bu durumda*

$$\langle \chi \, , \, \psi \rangle = 0$$
$$\langle \chi \, , \, \chi \rangle = 1$$

olur.

Sonuç 11.15. *$V_1, \ldots, V_k$ bir eksiksiz indirgenemez izormorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülleri kümesi olsun, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ ise sırasıyla bunların karakterleri olsun. Bu durumda, her $i, j = 1, \ldots, k$ için*

$$\langle \chi_i \, , \, \chi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = j \text{ ise }, \\ 0, & \text{eğer } i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

olur. [2]

Bir G grubu için $V_1, \ldots, V_k$ şeklinde bir eksiksiz indirgenemez izormorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülleri kümesi verildiğinde eğer bunların karakterleri sırasıyla $\chi_1, \ldots, \chi_k$ ise, bu karakterlerin G grubunun tüm indirgenemez karakterlerini verdiğine dikkat edelim.

Teorem 11.16. *V bir $\mathbb{C}G$-modülü, ψ ise ona karşılık gelen karakter olsun. $V_1, \ldots, V_k$ şeklinde bir eksiksiz indirgenemez izormorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülleri kümesi alalım. Bunlara, sırasıyla $\chi_1, \ldots, \chi_k$ indirgenemez karakterleri karşılık geliyor olsun. Bu durumda*

$$\psi = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k$$

olacak şekilde $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ sayıları vardır ve sayılar her $i = 1, \ldots, k$ için

$$d_i = \langle \psi \, , \, \chi_i \rangle$$

denklemiyle belirlenir. V 'nin indirgenemez direkt toplam ayrışması

$$V \cong \underbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1}_{d_1 \ adet} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \cdots \oplus V_2}_{d_2 \ adet} \oplus \ \cdots \ \oplus \underbrace{V_k \oplus \cdots \oplus V_k}_{d_k \ adet}$$

[2] Buradaki δ_{ij}, *Kronecker deltası* olarak isimlendirilir.

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\langle \psi \,,\, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2$$

olur.

Kanıt. Egzersiz. Bu teorem, daha önce indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü direkt toplam ayrışması için elde ettiğimiz sonuçlardan elde edilir. □

Bu teorem ile, bir karakterin ve dolayısıyla bir $\mathbb{C}G$-modülünün indirgenemez olup olmadığını doğrudan elde etmenin de bir yoluna ulaşmış oluyoruz:

Sonuç 11.17. *V bir $\mathbb{C}G$-modülü, ψ de onun karakteri olsun. V ve ψ indirgenemezdir ancak ve ancak $\langle \psi \,,\, \psi \rangle = 1$ ise.*

Kanıt. Egzersiz. ψ 'nin indirgenemez olması için yukarıdaki teoremdeki d_i değerlerinin sadece birinin 1, diğerlerinin 0 olması gerektiğini gözlemleyin. □

Örnek 11.3. $G = S_3 \cong D_6$ grubunu alalım. Bu gurun denklik sınıflarını

$$\{e\} \;,\; \{(123), (132)\} \;,\; \{(12), (13), (23)\}$$

olarak hesaplamıştık. Ayrıca, bu grubun karakter tablosunu yukarıda Tablo 11.1 'da görmüştük, bu tabloyu hatırlayalım (S_3 ile D_6 arasındaki izomorfizmi $a = (123), b = (12)$ alarak düşünebilirsiniz). Şimdi, bu grubun $\mathcal{S} : e_1, e_2, e_3$ standart tabanıyla birlikte $V = \mathbb{R}^3$ üzerinde her bir $\sigma \in S_3$ için

$$\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

ile verilen permütasyon modülünü alalım. Bu $\mathbb{C}G$-modülünde grubun eşlenik sınıflarının temsilcilerinin etkilerine karşılık gelen matrisler standart tabanda şunlardır:

$$[e]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [(123)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [(12)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu $\mathbb{C}G$-modülünün karakterini ψ ile gösterelim. Denklik sınıflarının büyüklüğünden merkezleyicilerin, yani $C_G(g)$ altgruplarının büyüklüklerini de Teorem 10.7 ile eşlenik sınıflarının büyüklüğünden hemen hesaplayabiliyoruz.

İşlemleri rahat görmek için bu karakterin değerlerini G grubunun karakter tablosunun dibine ekleyelim:

g	e	(123)	(12)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0
ψ	3	0	1
$C_G(g)$	6	3	2

χ_1, χ_2, χ_3 karakterlerinin sırasıyla Örnek 8.2'deki U_1, U_2, U_3 indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerine karşılık geldiğini hatırlayalım.

Şimdi, V 'nin indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerine nasıl ayrıştığını, bu tabloyla iç çarpım hesabı yaparak ve Teorem 11.16'yı ve Önerme 11.13'ü kullanarak rahatlıkla hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
d_1 = \langle \psi \, , \, \chi_1 \rangle &= \frac{1.3}{6} + \frac{1.0}{3} + \frac{1.1}{2} = 1 \\
d_2 = \langle \psi \, , \, \chi_2 \rangle &= \frac{1.3}{6} + \frac{1.0}{3} + \frac{(-1).1}{2} = 0 \\
d_3 = \langle \psi \, , \, \chi_1 \rangle &= \frac{2.3}{6} + \frac{(-1).0}{3} + \frac{0.1}{2} = 1 \; .
\end{aligned}$$

Buradan $\psi = \chi_1 + \chi_3$ olduğuna, ve dolayısıyla

$$V \cong U_1 \oplus U_3$$

sonucuna ulaşırız ve V için indirgenemez direkt toplam ayrışmasını elde etmiş oluruz.

Sıradaki teorem, $\mathbb{C}G$-modüllerini ayırt etmek için karakterleri incelemenin yeterli olduğunu söylüyor.

Teorem 11.18. *V ve W birer indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olsun, χ ve ψ ise sırasıyla V ve W'nun karakterleri olsun. Bu durumda, V ve W izomorfiktir ancak ve ancak $\chi = \psi$ ise.*

Kanıt. Egzersiz. $\mathbb{C}G$-modüllerinin izomorfizm sınıfları, bileşenleri olan indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin direkt toplam ayrışmalarında kaçar kere kullanıldığıyla belirlenir. Bu sayılar ise yukarıdaki gibi iç çarpımla elde edilebilir. $\square$