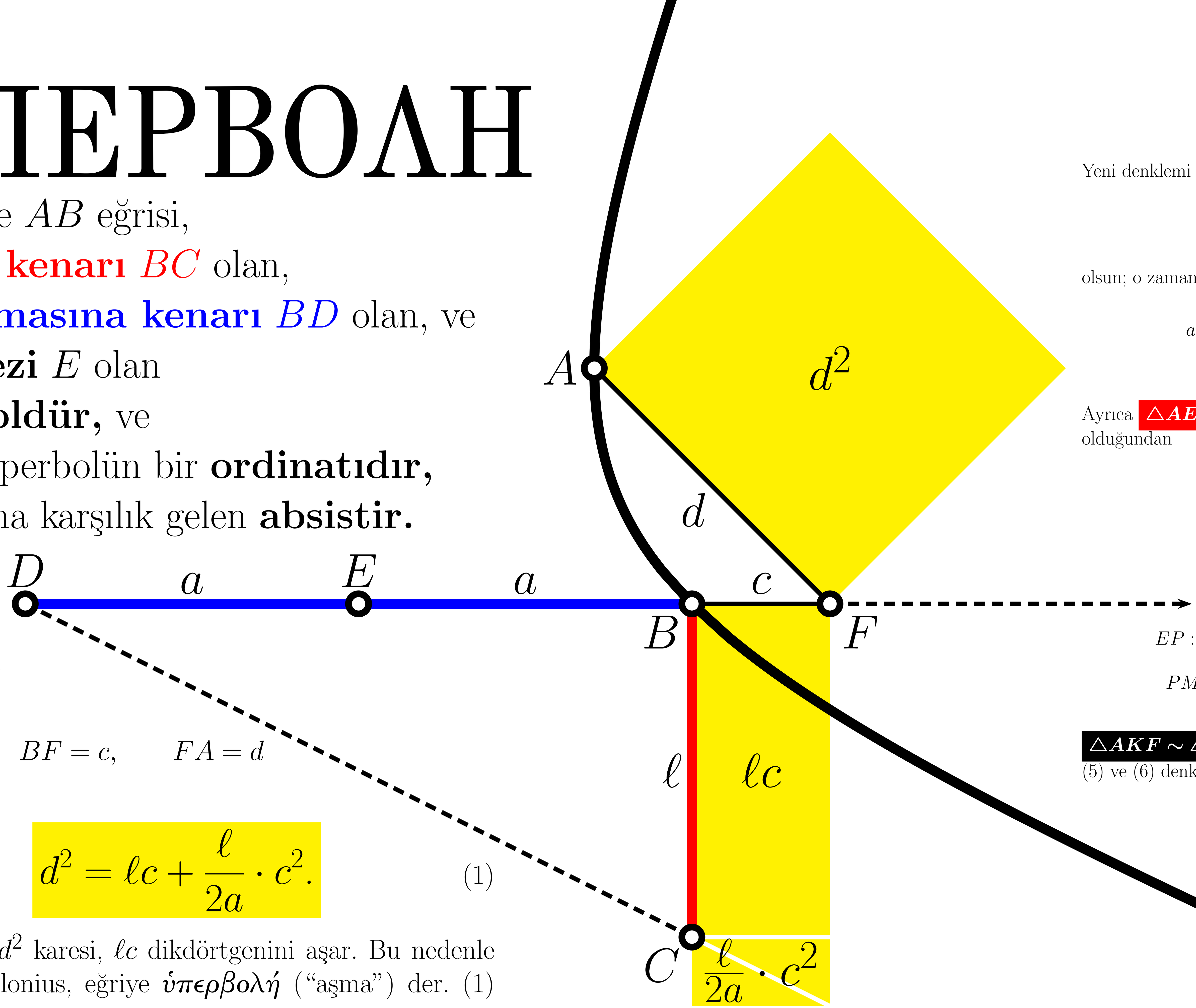
ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Şekillerde AB eğrisi,

- **dikey kenarı** BC olan,
- **yanlamasına kenarı** BD olan, ve
- **merkezi** E olan

hiperboldür, ve

- AF, hiperbolün bir **ordinatıdır,**
- BF, ona karşılık gelen **absistir.**



Bu durumda

$BC=\ell$,
$EB=a$, $\quad BF=c$, $\quad FA=d$

ise

$$d^2=\ell c+\frac{\ell}{2a}\cdot c^2. \tag{1}$$

Özel olarak d^2 karesi, ℓc dikdörtgenini aşar. Bu nedenle Pergeli Apollonius, eğriye *ὑπερβολή* ("aşma") der. (1) eşitliğinden

$$d^2=\frac{\ell}{2a}\cdot\bigl((a+c)^2-a^2\bigr). \tag{2}$$

(1) ve (2) eşitlikleri tamamen geneldir. Tüm ordinatlar birbirine paraleldir. GH herhangi bir ordinat ve

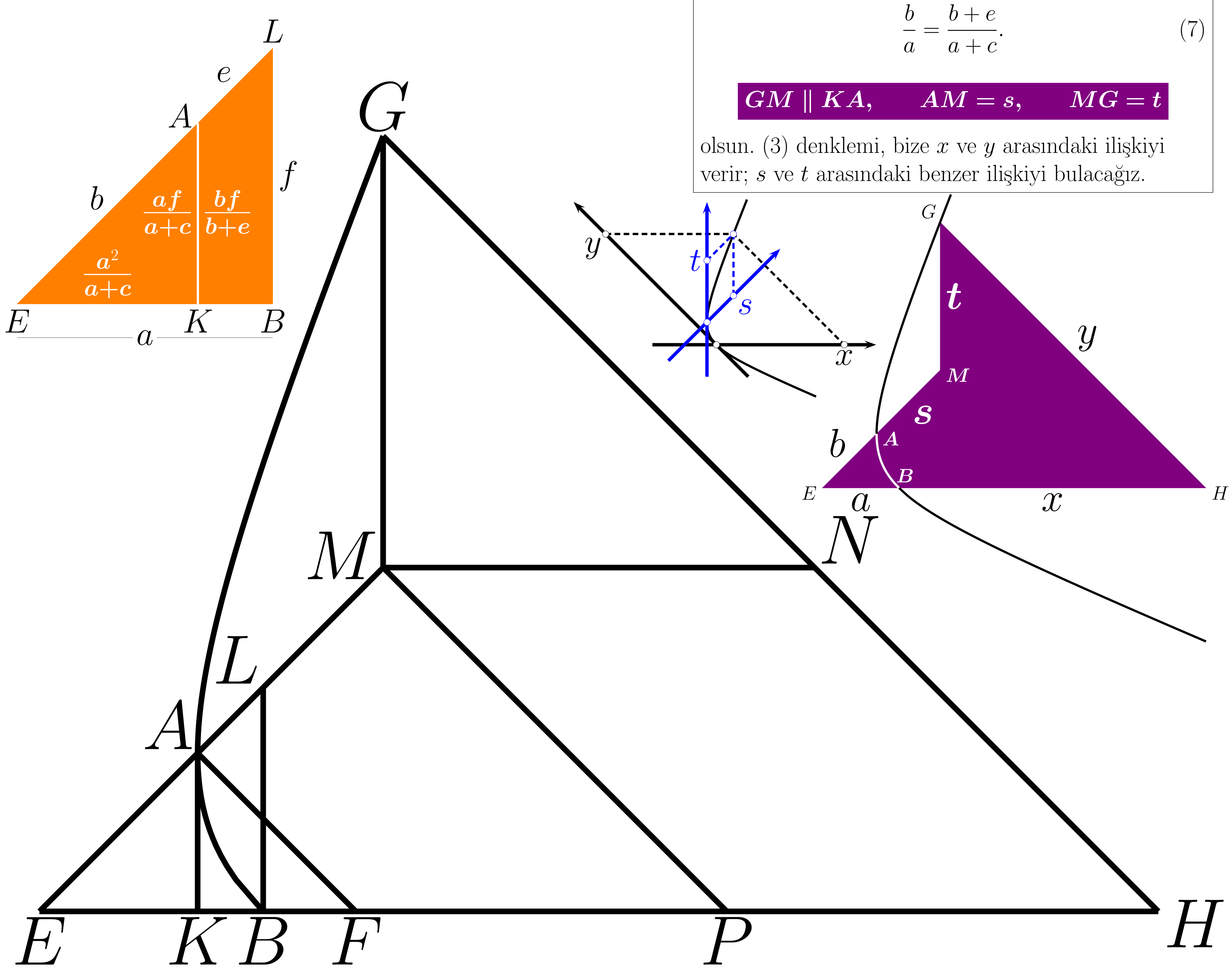
$$BH=x, \qquad HG=y$$

ise (2) eşitliğine göre

$$y^2=\frac{\ell}{2a}\bigl((a+x)^2-a^2\bigr),$$

dolayısıyla

$$\frac{y^2}{d^2}=\frac{(a+x)^2-a^2}{(a+c)^2-a^2}. \tag{3}$$



$$EK:EB::EB:EF, \tag{4}$$
$$BL \parallel KA,$$
$$EA=b, \qquad AL=e, \qquad LB=f$$

olsun. (4) orantısından, $EF=a+c$ olduğundan

$$EK=\frac{a^2}{a+c};$$

$\triangle AKE\sim\triangle LBE$ benzerliğinden

$$AK=\frac{bf}{b+e}, \qquad AK=\frac{a^2}{a+c}\cdot\frac{a}{f}=\frac{af}{a+c}, \tag{5}$$
$$KF=a+c-\frac{a^2}{a+c}=\frac{(a+c)^2-a^2}{a+c}. \tag{6}$$

(5) denklemlerinden

$$\frac{b}{a}=\frac{b+e}{a+c}. \tag{7}$$

$$GM\parallel KA, \qquad AM=s, \qquad MG=t$$

olsun. (3) denklemi, bize x ve y arasındaki ilişkiyi verir; s ve t arasındaki benzer ilişkiyi bulacağız.

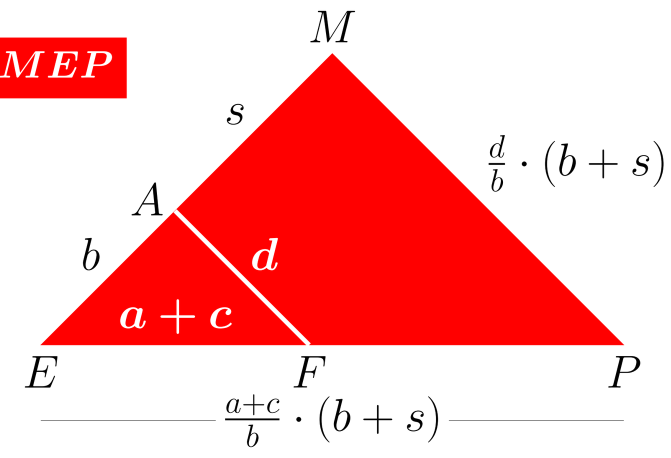
Yeni denklemi bulmak için

$$MN\parallel BH, \qquad MP\parallel AF$$

olsun; o zaman

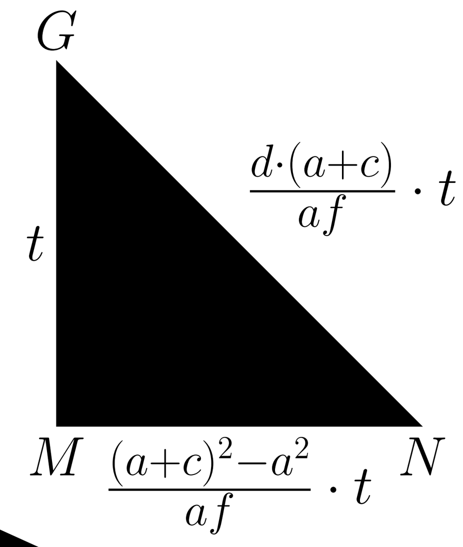
$$a+x=EH=EP+PH=EP+MN, \tag{8}$$
$$y=HG=HN+NG=PM+NG. \tag{9}$$

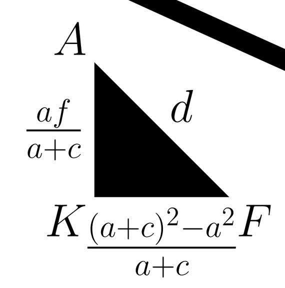
Ayrıca $\triangle AEF\sim\triangle MEP$ olduğundan



$$EP:EM::EF:EA, \qquad EP=\frac{a+c}{b}\cdot(b+s), \tag{10}$$
$$PM:EM::FA:EA, \qquad PM=\frac{d}{b}\cdot(b+s); \tag{11}$$

$\triangle AKF\sim\triangle GMN$ olduğundan, (5) ve (6) denklemlerinden





$$MN:MG::KF:KA, \qquad MN=\frac{(a+c)^2-a^2}{af}\cdot t, \tag{12}$$
$$NG:MG::FA:KA, \qquad NG=\frac{d\cdot(a+c)}{af}\cdot t. \tag{13}$$

(8), (10), ve (12) eşitliklerine göre

$$a+x=\frac{a+c}{b}\cdot(b+s)+\frac{(a+c)^2-a^2}{af}\cdot t, \tag{14}$$

ve (9), (11), ve (13) eşitliklerine göre

$$y=\frac{d}{b}\cdot(b+s)+\frac{d\cdot(a+c)}{af}\cdot t. \tag{15}$$

Şimdi (14) eşiliğinden

$$\begin{aligned}\frac{(a+x)^2-a^2}{(a+c)^2-a^2}&=\frac{1}{(a+c)^2-a^2}\cdot\\&\quad\cdot\left(\left(\frac{a+c}{b}\cdot(b+s)+\frac{(a+c)^2-a^2}{af}\cdot t\right)^2-a^2\right)\\&=\frac{(a+c)^2}{(a+c)^2-a^2}\cdot\left(\frac{b+s}{b}\right)^2+\frac{(a+c)^2-a^2}{a^2f^2}\cdot t^2+\\&\quad+2\cdot\frac{a+c}{abf}\cdot(b+s)\cdot t-\frac{a^2}{(a+c)^2-a^2},\end{aligned}$$

ve (15) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{d^2}&=\frac{1}{d^2}\cdot\left(\frac{d}{b}\cdot(b+s)+\frac{d\cdot(a+c)}{af}\cdot t\right)^2\\&=\left(\frac{b+s}{b}\right)^2+\frac{(a+c)^2}{a^2f^2}\cdot t^2+2\cdot\frac{a+c}{abf}\cdot(b+s)\cdot t.\end{aligned}$$

Bunları (3) denklemine koyarak ve basitleştirerek

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b+s}{b}\right)^2+\frac{(a+c)^2}{a^2f^2}\cdot t^2\\&=\frac{(a+c)^2}{(a+c)^2-a^2}\cdot\left(\frac{b+s}{b}\right)^2+\frac{(a+c)^2-a^2}{a^2f^2}\cdot t^2-\frac{a^2}{(a+c)^2-a^2};\end{aligned}$$

benzer terimleri bir araya getirerek

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{f^2}&=\frac{a^2}{(a+c)^2-a^2}\cdot\left(\frac{b+s}{b}\right)^2-\frac{a^2}{(a+c)^2-a^2}\\&=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{(b+s)^2-b^2}{(a+c)^2-a^2}.\end{aligned}$$

Son olarak (7) eşitliğinden

$$\frac{t^2}{f^2}=\frac{(b+s)^2-b^2}{(b+e)^2-b^2}.$$

David Pierce dpierce@msgsu.edu.tr http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/ Matematik Bölümü Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi İstanbul