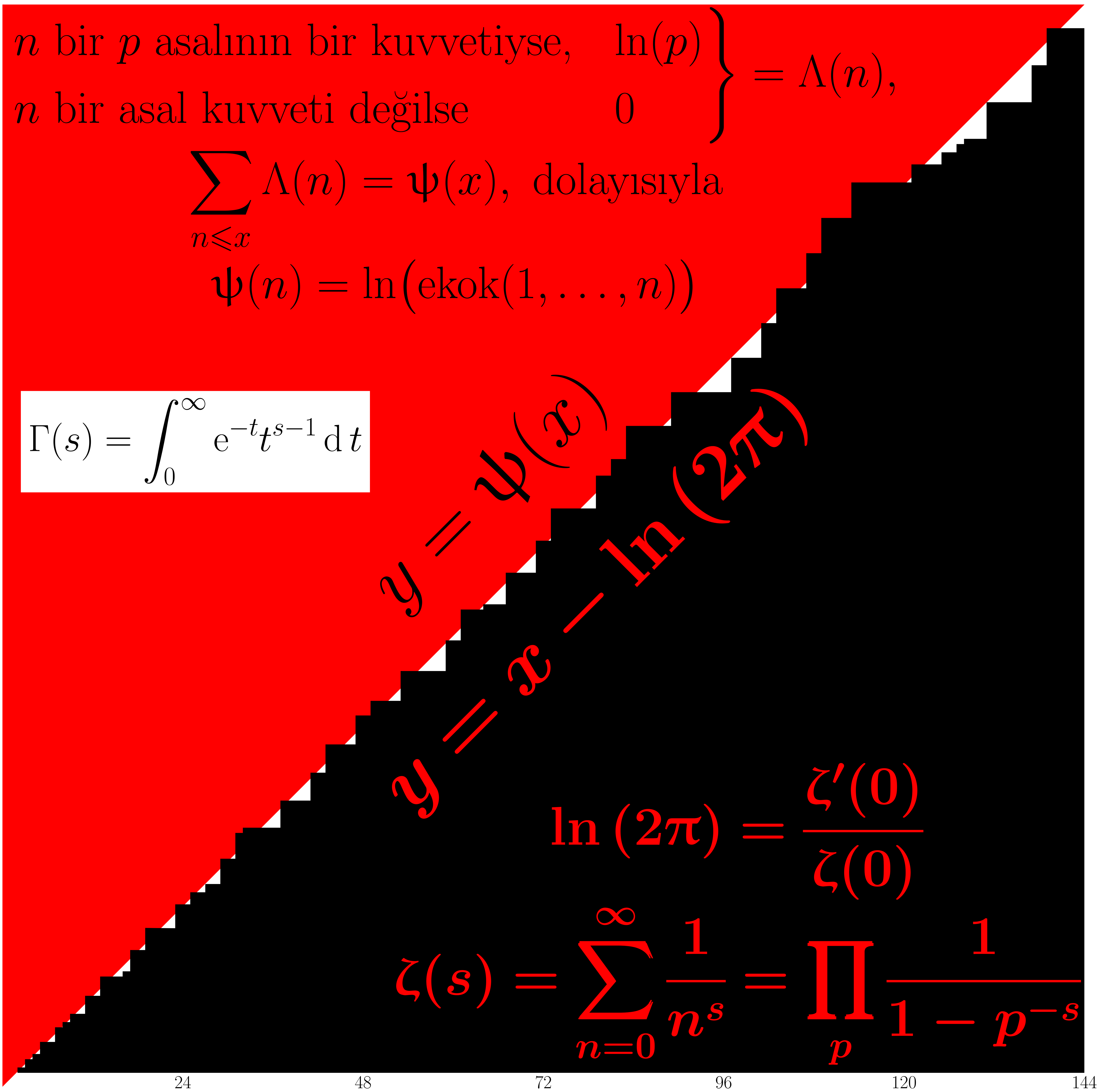
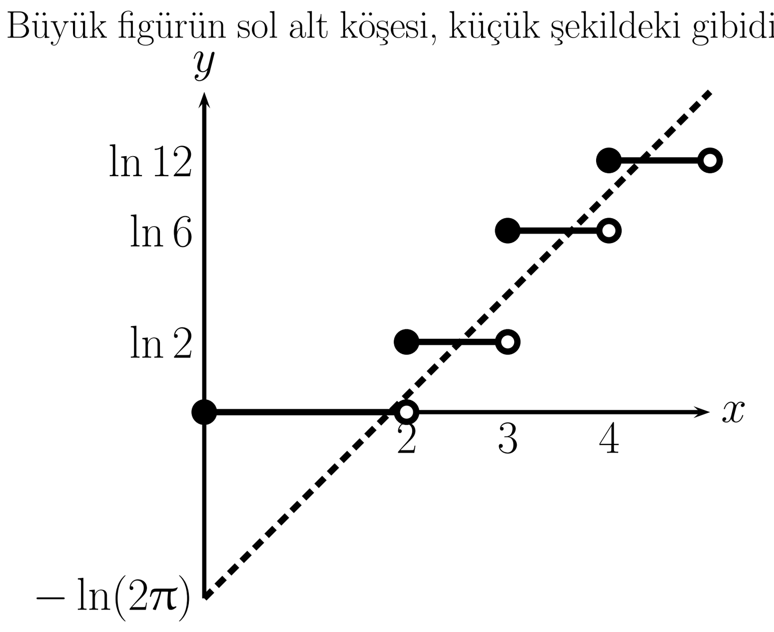
Asal Kuvvetleri Merdiveni



Büyük figürün sol alt köşesi, küçük şekildeki gibidir.



144'ten küçük olan asal kuvvetleri aşağıdadır. Yukarıda tanımlanan

- Λ, **von Mangoldt;**
- ψ, **Çebışov;**
- ζ, **Riemann zeta;**
- Γ, **Gamma göndermesidir.**

Son göndermenin tanımında s'nin gerçel parçası pozitiftir, ama parçalı integrallemeyle

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Analitik uzanımla, pozitif olmayan tamsayılarda hariç tüm karmaşık sayılarda analitik olan Γ göndermesi elde edilir.

1850 **Çebışov Teoremi'ne** göre, bazı pozitif A ve B için, büyük gerçel x için

$$A \leqslant \frac{\psi(x)}{x} \leqslant B.$$

1896 ayrı ayrı Hadamard'ın ve de la Vallée-Pousin'in kanıtladığı **Asal Sayılar Teoremi'ne** göre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

1859 **Riemann Hipotezinin** bir biçimine göre, her pozitif ε için, bazı A için, büyük x için

$$|\psi(x) - x| \leqslant Ax^{1/2+\varepsilon}. \tag{$*$}$$

Riemann'ın gösterdiğine göre

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-2s}{4}\right)\cdot\zeta\left(\frac{1-2s}{2}\right)}{\pi^{\frac{1-2s}{4}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+2s}{4}\right)\cdot\zeta\left(\frac{1+2s}{2}\right)}{\pi^{\frac{1+2s}{4}}}.$$

Bundan dolayı, analitik uzanımla, 1 hariç tüm karmaşık sayılarda analitik olan ζ göndermesi elde edilir. Göndermenin **aşikâr sıfırları,** negatif çift tamsayılardır. Kalan sıfırları, ρ olsun. Eğer $\rho = \beta + \mathrm{i}\gamma$ ise, o zaman $0 < \beta < 1$, ve orijinal biçiminde Riemann Hipotezi, her durumda

$$\beta = \frac{1}{2}. \tag{$\dagger$}$$

1895 von Mangoldt'un kanıtladığına göre

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}&\frac{\psi(x+h)+\psi(x-h)}{2}\\ &= x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\zeta(\omega)=0}\frac{z^\omega}{\omega}\\ &= x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_\rho \frac{z^\rho}{\rho}.\end{aligned}$$

Bundan dolayı Riemann Hipotezi'nin ($*$) biçimi, ($\dagger$) biçiminden çıkar.

2 3 4 5 7 8 9 11 13 16 17 19 23 25 27 29 31 32 37 41 43 47 49 53 59 61 64 67 71 73 79 81 83 89 97 101 103 107 109 113 121 125 127 128 131 137 139

David Pierce dpierce@msgsu.edu.tr http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/ Matematik Bölümü Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi İstanbul